Notas de Topologia Geral

George Svetlichny

15 de fevereiro de 2021

Conteúdo

Introdução

As notas de topologia aqui apresentadas reproduzem em grande parte as notas mimeografadas do curso "Topologia Geral" lecionado na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro nos anos de 1974 e 1975. O espírito do curso lecionado foi de demorar detalhadamente sobre os conceitos e construções básicas da topologia precisamente onde o aluno desacostumado a tal nível de abstração, sentia dificuldade. As notas refletem esta preocupação pelos detalhes por exemplo da construção da topologia quociente o da compactificação de Stone-Cech. Não pretendíamos com este texto substituir os excelentes já existentes, mas ampliar certas partes cruciais para torná-las mais acessíveis. Sentir-se-á a falta de certos tópicos, especialmente a aritmética de números ordinais, e as topologias em espaços de aplicações. O número de exercícios também é pequeno, mas a maioria dos exemplos pode ser encarado como exercícios pois as afirmações neles contidas geralmente não são demonstradas. A topologia geral é uma ferramenta altamente aplicável. Somente consideramos as aplicações mais básicas. Exemplos mais elaborados podem ser encontrados em livros mais dedicados a aplicações. O último capítulo do texto apresenta um teorema de existência de soluções a uma equação diferencial, que pode ser considerado protótipo de demonstrações topológicas de existência.

Esta versão eletrônica das notas é fiel a versão publicada pelo Departmento de Matemática a qual não é mais disponível. Foram corrigios algumas omissões e alguns erros no texto matemático do original junto com vários (certamente não todos) erros de português.

Após 45 anos a bibliografia original ficou desatualizada e foi retirada. A internet é um recurso melhor para procurar referências.

Capítulo 1

Conceitos e Resultados Elementares da Teoria de Conjuntos

Usaremos constantemente durante este livro vários resultados da teoria de conjuntos, os mais elementares dos quais expomos neste capítulo. Outros serão apresentadas em momentos oportunos.

Definição 1.1 *Seja X um conjunto. Denotemos por $\mathcal{P}(X)$ o* conjunto das partes *de X; isto é, $\mathcal{P}(X) = \{S \,|\, S \subset X\}$.*

Nota-se que $\emptyset, X \in \mathcal{P}(X)$ e que para todo $x \in X$ vale $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$. Denota-se, às vezes, $\mathcal{P}(X)$ também por 2^X

Sejam agora A e X conjuntos quaisquer.

Definição 1.2 *Uma* família *de elementos de X* indexados *por A é uma aplicação $f : A \to X$.*

Devido ao contexto do emprego da palavra "família" que é reservado normalmente para certos fins conceituais, usa-se uma notação especial. Uma família denotasse por $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ou por (x_α), $\alpha \in A$, onde $x_\alpha = f(\alpha)$. Não confunda a família $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ com o conjunto $\{x_\alpha \,|\, \alpha \in A\}$, pois numa família pode ocorrer que $x_\alpha = x_\beta$ com $\alpha \neq \beta$ e estes elementos serão identificados no conjunto. Na família x_α é o α-ésimo elemento, e x_β o β-ésimo, e para $\alpha \neq \beta$ são considerados elementos distintos da família embora possam ser iguais como elementos de X. Intuitivamente, uma família pode ser vista como uma coleção de elementos na qual um elemento de X pode entrar várias vezes separadamente. É legítimo considerar a situação $A = \emptyset$. Uma família indexada pelo conjunto vazio chama-se família vazia. A família vazia não contém nenhum elemento. Qualquer subconjunto $S \subset X$ pode ser considerado como uma família de elementos de X. Basta tomar S como conjunto de índices e considerar a aplicação inclusão $\iota_S : S \to X$ definida por $\iota_S(x) = x$. Assim cada elemento é indexado por ele mesmo.

Definição 1.3 *Seja $(S_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma família de subconjuntos de X; isto é $S_\alpha \in \mathcal{P}(X)$, $\alpha \in A$. Defina*

(a) $\bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha = \{x \in X \,|\, \exists\, \alpha \in A \quad \textit{tal que} \quad x \in S_\alpha\}$

(b) $\bigcap_{\alpha\in A} S_\alpha = \{x \in X \,|\, \forall\, \alpha \in A, \quad x \in S_\alpha\}$

Os dois conjuntos $\bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha$ e $\bigcap_{\alpha\in A} S_\alpha$ pertencem também a $\mathcal{P}(X)$ e chamam-se *reunião* e *interseção* da família respectivamente. Escreve-se às vezes $\cup\{S_\alpha \,|\, \alpha \in A\}$ e $\cap\{S_\alpha \,|\, \alpha \in A\}$ para a reunião e a interseção de uma família de conjuntos. Adota-se às vezes, uma convenção especial, explicado mais em baixo, quando $A = \emptyset$. Por *convenção*, a reunião de uma família vazia de subconjuntos de X o conjunto vazio e a intercessão de uma família vazia de subconjuntos de X e o próprio X. Note que esta última convenção é passível de confusões pois uma família vazia de subconjuntos de X pode ser também considerado como uma família vazia de subconjuntos de qualquer outro conjunto Y, e assim, para aplicar a convenção, é preciso fixar primeiro o conjunto X explicitamente.

Muitas vezes por abuso do formalismo, uma família $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ é dada sem especificar exatamente o conjunto X ao qual os elementos da família pertencem. Isto não deve causar confusões, pois podemos sempre considerar cada x_α como elemento de um certo conjunto X_α e assxm definir $X = \bigcup X_\alpha$ e considerar a família como uma família de elementos deste X. Similarmente é comum considerar famílias $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ onde cada x_α pode pertencer a um conjunto X_α desde o princípio diferente.

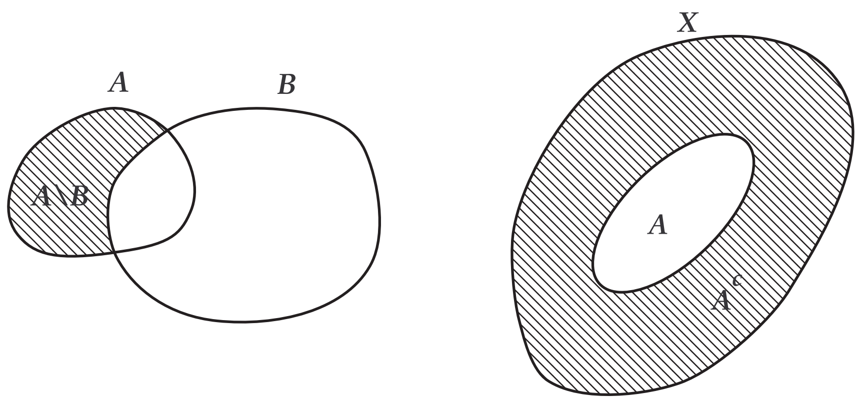
Definição 1.4

(a) *Sejam A e B dois conjuntos, denota-se por $A\backslash B$ o* conjunto diferença

$$A \setminus B = \{x \in A \,|\, x \notin B\}.$$

(b) *Dado* $A \in \mathcal{P}(X)$ *denota-se por* A^c *o* complemento *de* A*, isto é:* $A^c = X \setminus A$.

Graficamente podemos visualizar estas definições assim:



Seja, agora, $f : X \to Y$ uma aplicação qualquer entre dois conjuntos quaisquer.

Definição 1.5

(a) *Para* $S \subset X$ *defina* $f(S) \subset Y$ *por*

$$f(S) = \{f(x) \,|\, x \in S\}.$$

(b) *Para* $T \subset Y$ *defina* $f^{-1}(T) \subset X$ *por*

$$f^{-1}(T) = \{x \,|\, f(x) \in T\}.$$

O conjunto $f(S)$ definido em (a) chama-se *imagem* de S pela aplicação f e o conjunto $f^{-1}(T)$ definida em (b) chama-se *imagem inversa* de T pela aplicação f. Note que (a) define uma aplicação $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ por $S \mapsto f(S)$ a qual não deve ser confundida com a aplicação $f : X \to Y$ embora seja comum denotá-la pela mesma letra f. Similarmente (b) define uma aplicação $\mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ por $T \mapsto f^{-1}(T)$ a qual não deve ser confundida com a aplicação inversa $f^{-1} : Y \to X$ caso esta última exista o que acontece quando f é uma bijeção.

Teorema 1.1 *As imagens e imagens inversas por uma aplicação $f : X \to Y$ satisfazem as seguintes propriedades: Sejam $(S_\alpha)_{\alpha\in A}$ e $(T_\lambda)_{\lambda\in L}$ famílias quaisquer de subconjuntos de X e de Y respectivamente, então*

(a) $f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in L} T_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in L} f^{-1}(T_\lambda)$

(b) $f^{-1}(\bigcap_{\lambda\in L} T_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in L} f^{-1}(T_\lambda)$

(c) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$

(d) $f(f^{-1}(A)) = A \cap f(X)$

(a′) $f(\bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in A} f(S_\alpha)$

(b′) $f(\bigcap_{\alpha\in A} S_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha\in A} f(S_\alpha)$

(c′) $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$

(d′) $f^{-1}(f(A)) \supset A$

Demonstraremos alguns destes resultados após as seguintes observações. As inclusões em (a'), (c') e (d') podem ser estritas. Nestes casos teremos igualdade se e somente se f for injetivo. Note que $f(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(Y) = X$, e que um caso particular de (c) é quando $A = Y$ que nos dá $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.

Note que (a), (b) e (c) dizem que f^{-1} preserva fielmente as operações usadas sobre conjuntos, enquanto (a'), (b') e (c') demonstram que somente a reunião e preservada pela operação de passar às imagens. Em outras palavras imagens inversas comportam-se de uma maneira muito mais regular do que as imagens. Este fato influi bastante no formalismo matemático.

A demonstração do teorema é elementar. Damo-la aqui somente para ressaltar certos fatos.

Demonstração:

(a) $x \in f^{-1}(\bigcap_{\lambda\in L} T_\lambda) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{\lambda\in L} T_\lambda \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in L,$ tal que $f(x) \in T_\lambda \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in L,$ tal que $x \in f^{-1}(T_\lambda) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\lambda\in L} f^{-1}(T_\lambda)$

(c) $x \in f^{-1}(A \setminus B) \Leftrightarrow f(x) \in A \setminus B \Leftrightarrow f(x) \in A, \quad f(x) \notin B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A), \quad x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

(b) Podemos demonstrar (b) do mesmo jeito que demonstramos (a), mas é uma boa prática para o desenvolvimento de intuição matemática tentar conseguir demonstrações que envolvem mais as propriedades formais e menos as considerações sobre os pontos. Aproveitamos então de (a), (c) e das leis de De Morgan:

$$f^{-1}(\bigcap_{\lambda\in L} T_\lambda) = \left(f^{-1}(\bigcap_{\lambda\in L} T_\lambda)\right)^{cc} = \left(f^{-1}((\bigcap_{\lambda\in L} T_\lambda)^c)\right)^c = \left(f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in L} T_\lambda^c)\right)^c$$
$$= \left(\bigcup_{\lambda\in L} f^{-1}(T_\lambda^c)\right)^c = \left(\bigcap_{\lambda\in L} f^{-1}(T_\lambda)\right)^{cc} = \bigcap_{\lambda\in L} f^{-1}(T_\lambda)$$

(d) $y \in f(f^{-1}(A)) \Leftrightarrow \exists\, x \in X, y = f(x), x \in f^{-1}(A) \Leftrightarrow \exists\, x \in X, y = f(x), f(x) \in A \Leftrightarrow y \in A \cap f(X)$.

(a') $y \in f(\bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha) \Leftrightarrow \exists\, x \in \bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha, f(x) = y \Leftrightarrow \exists\, x\, \exists\, \alpha, x \in S_\alpha, f(x) = y \Leftrightarrow \exists\, \alpha\, \exists\, x, x \in S_\alpha, f(x) = y \Leftrightarrow \exists\, \alpha\, y \in f(S_\alpha) \Leftrightarrow y \in \bigcup_{\alpha\in A} f(S_\alpha)$

(b') $y \in f(\bigcap_{\alpha\in A} S_\alpha) \Leftrightarrow \exists\, x \in \bigcap_{\alpha\in A} S_\alpha, f(x) = y \Leftrightarrow \exists\, x\, \exists\, \alpha, x \in S_\alpha, f(x) = y \Rightarrow \exists\, \alpha\, \exists\, x, x \in S_\alpha, f(x) = y \Leftrightarrow \exists\, \alpha\, y \in f(S_\alpha) \Leftrightarrow y \in \bigcap_{\alpha\in A} f(S_\alpha)$

$\diamondsuit$

Note que a diferença entre (a') e (b') que dá lugar a uma igualdade no primeiro caso e uma inclusão no segundo, é devido a um fato lógico de que para qualquer proposição $P(x,\alpha)$ sobre x e α tem-se uma equivalência $\exists\, x\, \exists\, \alpha\, P(x,\alpha) \Leftrightarrow \exists\, \alpha\, \exists\, x\, P(x,\alpha)$ no caso de dois quantificadores existenciais mas somente uma implicação $\exists\, x\, \forall\, \alpha\, P(X,\alpha) \Rightarrow \forall\, \alpha\, \exists\, x\, P(x,\alpha)$ no caso de um quantificador existencial e outro universal. O lado direito desta implicação afirma a existência de um x para cada α, sendo que este x pode depender de α, enquanto o lado esquerdo afirma a existência de um x que serve para todo α. Assim não é possível ter uma equivalência.

Exercício 1.1 *Demonstre (c') e (d') do Teorema 1.1.*

Exercício 1.2 - *Construa exemplos que demonstram que não podemos afirmar igualdade em (b'), (c') e (d') do Teorema 1.1.*

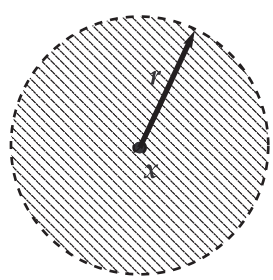
Exercício 1.3 *Demonstre que a igualdade pode ser afirmada em (b'), (c') e (d') quando f for injetora.* [Sugestão: seja $Z = f(X) \subset Y$ e seja $g : Z \to X$ a aplicação inversa de f. Note que $f(A) = g^{-1}(A)$ e use os resultados sobre imagens inversas].

Capítulo 2

O conceito de continuidade em $\mathbb{R}^n$

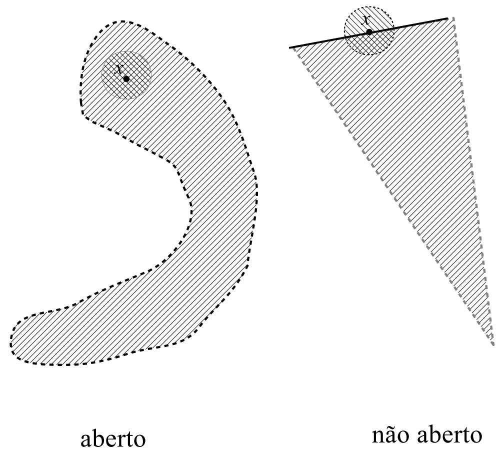
Esta seção serve como revisão de conceitos com os quais supomos que o leitor já esteja familiar. Maiores detalhes podem ser vistos em qualquer texto de análise real.

Lembremo-nos que o espaço $\mathbb{R}^n$ é o conjunto de todas as n-úplas $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$. Para todo elemento $x \in \mathbb{R}^n$ definimos a *norma euclidiana* $||x||$ por $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ e a distância euclidiana $d(x, y)$ entre x e y por $d(x, y) = ||x - y||$. A bola aberta $B_r(x)$ de raio $r > 0$ e centrado em $x \in \mathbb{R}^n$ é definido por $B_r(x) = \{y \,|\, ||y - x|| < r\}$.



Chama-se conjunto *aberto*qualquer subconjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ que satisfaz a seguinte condição.

$$\forall\, x \in U\, \exists\, r > 0 \text{ tal que } B_r(x) \subset U$$



Em outras palavras é possível interpor entre qualquer ponto x de U e o próprio U uma bola aberta; ou seja se $x \in U$ podemos achar um $r > 0$ tal que $x \in B_r(x) \subset U$, o que também pode ser escrito como $\{x\} \subset B_r(x) \subset U$ e interpretado como a interpolação entre dois conjuntos $\{x\}$ e U de um conjunto de tipo especial, a saber uma bola aberta. Veremos que este tema de interpolação nos perseguirá continuamente.

Exercício 2.1 *Demonstre que toda bola aberta é um conjunto aberto.*

Lembremo-nos também do conceito de convergência de seqüências. Dizemos que uma seqüência $x_k \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \ldots$ converge para $x \in \mathbb{R}^n$ e escrevemos $x_k \to x$ se e somente se $d(x_k, x) \to 0$. Isto eqüivale a dizer que dado $r > 0$ existe um $K > 0$ tal que $k \geq K \Rightarrow d(x_k, x) < r$, ou seja $k \geq K \Rightarrow x_k \in B_r(x)$. Mais informalmente podemos dizer que a seqüência converge para x se e somente se ela eventualmente entra e fica dentro de qualquer bola aberta centrada em x.

Exercício 2.2 *Demonstre que* $x_k \not\to x \Leftrightarrow$ *existe uma bola aberta* $B_r(x)$ *tal que* $x_k \notin B_r(x)$ *para um número infinito to de índices* k.

Teorema 2.1 *Seja* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *uma aplicação dada. As seguintes três condições são equivalentes:*

(a) *Se* U *é aberto em* $\mathbb{R}^m$ *então* $f^{-1}(U)$ *é aberto em* $\mathbb{R}^n$.

(b) *Para todo* $x \in \mathbb{R}^n$ *e dado* $\epsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que* $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$. *Isto é, qualquer bola* $B_\epsilon(f(x))$ *centrada na imagem* $f(x)$ *de qualquer ponto* x, *contém a imagem de uma bola centrada em* x.

(c) $x_k \to x \Rightarrow f(x_k) \to f(x)$.

Quando qualquer uma destas condições é satisfeita (e assim todas as três) a função é dita *contínua*. Note que a condição (b) pode ser escrita da forma $\forall\, x \in \mathbb{R}\, \forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$ tal que $||y - x|| < \delta \Rightarrow ||f(y) - f(x)|| < \epsilon$ o que é a forma da definição de continuidade com a qual o leitor talvez esteja mais familiar. A forma apresentada acima porém é mais adequada ao desenvolvimento dos conceitos que veremos adiante.

Demonstração:

(a)$\Rightarrow$(b) Suponha a e sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$. Sendo que $B_\epsilon(f(x))$ é aberto temos por (a) que $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ é aberto, e sendo que x pertence a este conjunto existe um $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ logo $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$.

(b)$\Rightarrow$(c) Suponha (b e seja $x_k \to x$ e $\epsilon > 0$. Seja $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$. Como $x_k \to x$ existe um K tal que $k \geq K \Rightarrow x_k \in B_\delta(x) \Rightarrow f(x_k) \in B_\epsilon(f(x))$ logo $f(x_k) \to f(x)$.

(c)$\Rightarrow$(a) Suponha (c) e seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Suponha por absurdo que $f^{-1}(U)$ não seja aberto, então existe um $x \in f^{-1}(U)$ tal que para todo k inteiro positivo, $B_{1/k}(x) \not\subset f^{-1}(U)$. Escolha $x_k \in B_{1/k}(x) \setminus f^{-1}(U)$. Evidentemente $x_k \to x$ e $f(x_k) \notin U$. Sendo U aberto e $f(x) \in U$ existe um $r > 0$ tal que $B_r(f(x)) \subset U$. Concluímos que $f(x_k) \notin B_r(f(x))$ e assim $f(x_k) \not\to f(x)$ contradizendo c.

$\diamondsuit$

Note que usamos na demonstração um procedimento de implicação em círculo

$$\begin{tikzcd}
& \text{(a)} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{(c)} \arrow[ur, Rightarrow] & & \text{(b)} \arrow[ll, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

para concluir a equivalência de todos os enunciados.

Exercício 2.3 *Demonstre diretamente cada uma das implicações (a) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a) do Teorema 2.1.*

Cada uma das três condições (a), (b), e (c) do Teorema 2.1 é uma possível definição de continuidade de uma aplicação. Cada uma tem seu contendo intuitivo próprio e assim umas vantagens e desvantagens mentais. Neste livro explicaremos em profundidade as generalizações de todas as três. A primeira condição é a mais sucinta e envolve somente o conceito de conjunto aberto. Será esta a ser explorada primeiro embora não sendo a mais intuitiva das três. Explicitamos agora as propriedades mais importantes da família de conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.2 *Considere* $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, *então*

(a) $\emptyset$ *e* $\mathbb{R}^n$ *são abertos*

(b) U, V *abertos* $\Rightarrow U \cap V$ *aberto*

(c) *Dado uma família* $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ *de abertos, a reunião da família* $\bigcup_\alpha G_\alpha$ *é aberta.*

Demonstração:

(a) O conjunto vazio é aberto por convenção lógica que explicaremos logo após a demonstração. Sendo que $x \in B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ é válido para todo x e todo $r > 0$ concluimos que $\mathbb{R}^n$ aberto.

(b) Suponha U e V abertos e $x \in U \cap V$. S endo U aberto tem-se $x \in B_r(x) \subset U$ para um $r > 0$ e sendo V aberto tem-se $x \in B_s(x) \subset V$ para um $s > 0$. Seja $t = \min(r, s)$ então $x \in B_t(x) \subset U \cap V$ e logo $U \cap V$ é aberto.

(c) Suponha $x \in \bigcup_\alpha G_\alpha$ onde cada G_α é aberto. Assim $x \in G_\beta$ para algum $\beta \in A$ e sendo G_β aberto tem-se $x \in B_r(x) \subset G_\beta$ para um $r > 0$. Logo $x \in B_r(x) \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$ e a reunião é um aberto.

$\diamondsuit$

Detemo-nos agora sobre umas convenções lógicas da matemática para explicar como se conclui automaticamente o fato de que $\emptyset$ é aberto. A convenço principal da qual falamos e de que uma implicação é tido como verdadeira quando a hipótese é falsa. Isto é, se p e q são preposições e p é falso, então a proposição $p \Rightarrow q$, ou seja "se p então q" é tido como verdadeira. Esta convenção parece estranha mas para finalidades matemáticas traz a vantagem de economia nos enunciados de definições e teoremas. A estranheza da convenção que tem como verdadeiro a afirmação "$2+2 = 5 \Rightarrow 4+4 = 9$" provém de dois sentimentos. O primeiro é que uma implicação normalmente tem a conotação de uma necessidade intrínseca da conclusão seguir da hipótese. Por exemplo na afirmação "se jogar uma pedra ela cairá" a conclusão segue da hipótese por uma lei física, por uma necessidade que transcende a forma lingüistica do enunciado. Agora, numa demonstração matemática as únicas deduções admissíveis são lógicas, e dizer que "se p então q" é nada mais que dizer que assumindo p como hipótese q segue por uma dedução lógica cujas leis foram dadas *a priori*. Uma destas leis e a assim chamado *modus ponens* que diz que das duas afirmações p e $p \Rightarrow q$ é legítimo concluir q. Assim para concluir q de $p \Rightarrow q$ é preciso primeiro estabelecer a verdade de p. Agora se p for falso e se a matemática for consistente no sentido que nenhuma afirmação falsa pode ser deduzida, nunca será possível utilizar modus ponens e concluir q de $p \Rightarrow q$. Assim respondemos ao segundo sentimento de estranheza que normalmente surge em relação a esta convenção, a saber que com ela vamos entrar em contradições. Ora, mesmo que as afirmações verdadeiras $p \Rightarrow q$ com p falso não entrem em deduções lógicas, elas servem para admitir que certos objetos satisfazem as condições de uma definição que sem a convenção seriam deixados de fora. Por exemplo, para que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ seja aberto a seguinte implicação tem que ser verdadeira

$$x \in A \Rightarrow \exists\, r > 0 \text{ tal que } B_r(x) \subset A.$$

Agora para $A = \emptyset$, $x \in A$ é sempre falso, logo a implicação é verdadeira e $\emptyset$ é aberto. Uma outra maneira de pensar nisto é assim: $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se e somente se $\forall\, x \in A\, \exists\, r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A$, logo um conjunto A não é aberto se e somente se $\exists\, x \in A\, \forall\, r > 0\, B_r(x) \not\subset A$. Para demonstrar que A não aberto é preciso achar um elemento que satisfaz uma dada propriedade, no caso $A = \emptyset$ é impossível achar um tal elemento pois $\emptyset$ não tem elementos. Para responder a quem insistir que $\emptyset$ não é aberto é só preciso dizer "mostre-me um elemento $x \in \emptyset$ tal que ..."

Pelo mesmo argumento devemos admitir que toda afirmação do tipo $\forall\, \alpha \in A, p(\alpha)$ é verdadeira quando $A = \emptyset$ para qualquer proposição $p(\alpha)$. Isto é consistente com a convenção sobre a implicação, pois $\forall\, \alpha \in A, p(\alpha)$ eqüivale a dizer que $\alpha \in A \Rightarrow p(\alpha)$.

Exercício 2.4 *Na teoria de conjuntos uma aplicação* $f : A \to X$ *é identificada com seu gráfico* $\Gamma f = \{(\alpha, f(\alpha) \,|\, \alpha \in A\} \subset A \times X$.

(a) *Suponha* $A \neq \emptyset$ *e demonstre que um subconjunto* $G \subset A \times X$ *é gráfico de uma aplicação de* A *para* X *se e somente se satisfaz*

(i) $\forall \alpha \in A, \exists x \in X$ *tal que* $(\alpha, x) \in G$

(ii) $(\alpha, x), (\alpha, y) \in G \Rightarrow x = y$.

(b) *Mostre que* $\emptyset \subset \emptyset \times X$ *satisfaz as condições (i) e (ii) da parte (a) deste exercício, definindo assim a única aplicação* $\emptyset \to X$.

(c) *Considere a família vazia de subconjuntos de* X, *mostre que segundo a convenção lógica a reunião desta família é* $\emptyset$ *e a interseção é* X.

Determinamos agora a estrutura de um aberto arbitrário da reta $\mathbb{R}$. Qualquer conjunto do tipo $\emptyset$, $(-\infty, r)$, (s, ∞), (a, b), e $\mathbb{R}$ chamaremos *intervalo aberto*.

Lema 2.1 *Um subconjunto* $S \subset \mathbb{R}$ *é um intervalo aberto se e somente se dado* $a, b \in S$, $a \leq b$, *existe um* $\epsilon > 0$ *tal que* $(a - \epsilon, b + \epsilon) \subset S$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Imediata.

($\Leftarrow$) Suponha $S \neq \emptyset$ e seja $m = \inf S$ e $M = \sup S$ onde admitimos a possibilidade de m ser $-\infty$ e de M ser $+\infty$. Considere $J = (m, M)$. Se $x \in S$ então por hipótese existe um $\epsilon > O$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset S$, logo $m < x < M$ e $x \in J$. Assim $S \subset J$. Por outro lado se $x \in J$ então existe $a \in S$ tal que $a < x$ e $b \in S$ tal que $x < b$. Por hipótese $(a, b) \subset S$ e sendo $x \in (a, b)$, $x \in S$. Assim $J \subset S$ e $S = J = (m, M)$.

$\diamondsuit$

Teorema 2.3 *Um aberto* $G \subset \mathbb{R}$ *é uma reunião no máximo enumerável de intervalos abertos disjuntos.*

Demonstração: Dado $x \in G$ existe uma bola aberta $B_r(x)$ tal que $B_r(x) \subset G$. Mas $B_r(x) = (x - r, x + r)$ é um intervalo aberto logo existem intervalos abertos J tal que $x \in J \subset G$. Seja agora I_x a reunião de tais intervalos J. Se $a, b \in I_x$, $a \leq b$ então $a \in J_a$, $b \in J_b$ para dois intervalos abertos, sendo $x \in J_a \cap J_b$ temos que $J = J_a \cap J_b$ é também um intervalo aberto com $a, b \in J$. Logo, pelo Lema 2.1 $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset J \subset I_x$ para algum ϵ e assim I_x é um intervalo aberto. Seja agora $x \neq x'$. Se $y \in I_x \cap I_{x'}$ então $I = I_x \cup I_{x'}$ é um intervalo aberto e como $x \in I$ e $x' \in I$ tem-se $I \subset I_x$, $I \subset I_{x'}$ mas então $I_x = I = I_{x'}$. Assim dois intervalos do tipo I_x ou coincidem ou são disjuntos. Considere agora o *conjunto* $\mathcal{J}$ dos intervalos do tipo I_x. Sendo que todo $x \in G$ pertence a algum destes, e como cada I_x é subconjunto de G concluímos que a reunião deste conjunto de intervalos é G. Pelo que já foi dito esta reunião é disjunta. Como cada intervalo contém um número racional podemos escolher um racional $q_I \in I$ para todo $I \in \mathcal{J}$. Isto dá uma aplicação $\mathcal{J} \to \mathbb{Q}$ por $I \mapsto q_I$. Sendo os membros de $\mathcal{J}$ disjuntos, a aplicação é injetora, e sendo $\mathbb{Q}$ enumerável, $\mathcal{J}$ é no máximo enumerável. $\diamondsuit$

Capítulo 3

Espaços Topológicos e Continuidade

No Capítulo 2 vimos como a noção de uma aplicação contínua de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$ pode ser definida por meio das famílias de conjuntos abertos nos dois espaços. A topologia geral abstrai desta situação para introduzir a noção de continuidade para aplicações entre espaços diferentes dos euclidianos. As três propriedades do Teorema 2.2 geralmente são os que servem como ponto de partida da abstração. Uma abstração matemática sempre segue o mesmo caminho. Uma certa família de objetos, (subconjuntos abertos de R^n no nosso caso) é explicitado por desempenhar um papel importante, destacam-se um conjunto de propriedades desta família (as três do Teorema 2.2 no nosso caso) por serem aquelas responsáveis pelo essencial do fenômeno estudado, este conjunto de propriedades agora é utilizado como *definição* da situação abstrata possibilitando assim que fenômenos semelhantes possam ser agora estudados em contextos remotos do original. Para introduzir a noção de continuidade em situações gerais introduzimos assim primeiro a seguinte definição.

Definição 3.1 *Um* espaço topológico *é um par* $(X, \mathcal{T})$ *onde* X *é um conjunto e* $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ *é um conjunto de subconjuntos de* X*, chamados* abertos*, que satisfaz*

(a) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$

(b) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$

(c) $G_\alpha \in \mathcal{T}, \alpha \in A \Rightarrow \cup_{\alpha \in A} G_\alpha \in \mathcal{T}$

O conjunto $\mathcal{T}$ de conjuntos abertos chama-se a *topologia* do espaço topológico.

Note que (b) implica por indução que uma interseção de um número finito de abertos é um aberto.

As vezes, por abuso de linguagem, fala-se do "espaço topológico X" em vez de "espaço topológico $(X, \mathcal{T})$" caso a topologia seja subentendida, ou determinada pelo contexto.

Exemplo 3.1

(a) $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{T}$ *é a família de abertos usuais introduzidos no Capitulo 2.*

(b) X *é um conjunto qualquer e* $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. *Esta topologia chama-se* topologia discreta *e o espaço,* espaço discreto.

(c) X *é um conjunto qualquer e* $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. *Esta topologia com somente dois abertos chama-se* topologia indiscreta *e o espaço,* espaço indiscreto.

(d) $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{(r, \infty) \mid r \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

(e) $X = \{1, 2\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1\}\}$. *Este espaço chama-se* espaço de Sierpinski*, e, a menos de troca dos dois pontos, é a única topologia num conjunto de dois pontos que não seja nem discreta nem indiscreta.*

(f) *Seja* X *um conjunto infinito e* $\mathcal{T}$ *formado pelo conjunto vazio* $\emptyset$ *e complementos de conjuntos finitos.*

É importante notar que o mesmo conjunto pode suportar várias topologias diferentes. Assim o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais pode ser considerado com a topologia introduzida em cada um dos exemplos acima menos o quinto. Um conjunto nunca vem com uma topologia já dada, ela tem que ser introduzida como parte do discurso matemático.

Exercício 3.1 *Determine a menos de permutações dos pontos todas as topologias de um conjunto com três pontos.*

Uma classe muito importante de espaços topológicos é fornecido pela classe de assim chamados espaços métricos. São espaços no qual é definido uma distância, abstraindo das propriedades da distância euclideaila do espaço $\mathbb{R}^n$

Definição 3.2 *Seja X um conjunto. Uma* métrica *em X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:*

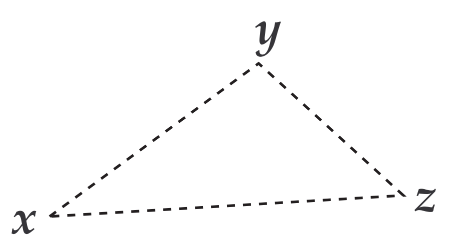
(a) $d(x, y) \geq 0$ *e* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(b) $d(x, y) = d(y, x)$

(c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

O par (X, d) onde d é uma métrica chama-se espaço métrico*. O número $d(x, y)$ chama-se a* distância de x a y.

A primeira propriedade diz então que a distância é nunca negativa e é zero somente para pontos coincidentes. A segunda afirma que a distância independe da ordem dos pontos: x é tão distante de y como y é de x. A terceira propriedade chama-se *desigualdade triangular*. Afirma que a distância de x a z é menor ou igual a soma das distâncias utilizando um ponto intermediário y.

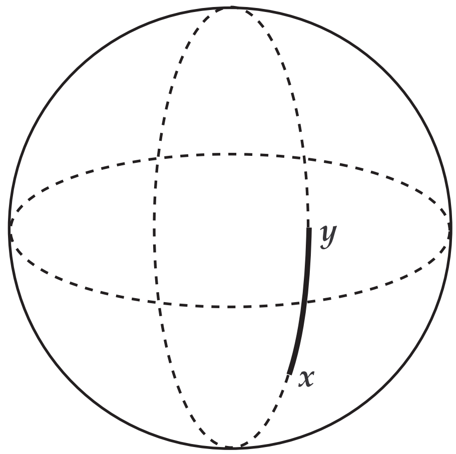


Em $\mathbb{R}^2$ equivale a dizer que a soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo é menor ou igual ao comprimento do terceiro lado.

Exemplo 3.2

(a) $X = \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = ||x - y||$ *a métrica euclideana usual*

(b) *X é a esfera $\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \mid z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1\}$ e $d(x, y)$ é o comprimento do menor arco do círculo máximo que passa por x e y. (No caso de pontos, antípodos qualquer arco de qualquer dos círculos máximos serve).*



(c) *X é um conjunto qualquer e*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & se \quad x = y \\ 1 & se \quad x \neq y \end{cases}$$

(d) *Seja $X = C([0,1],\mathbb{R}) = \{f : [0.1] \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ contínua}\}$, o espaço de funções reais contínuas em [0, 1], e defina a distância por: $d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$.*

Definição 3.3 *Sejam (X, d) um espaço métrico e $x \in X$. O conjunto $B_r(x) = \{y \in X \,|\, d(y, x) < r\}$ chama-se* bola aberta *de raio r e centro x.*

Definição 3.4 *Um subconjunto $U \subset X$ de um espaço métrico (X, d) é dito* aberto *se para todo $x \in U$ existe um $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset U$.*

Teorema 3.1 *Os abertos de um espaço métrico formam uma topologia.*

A demonstração segue a mesma linha que a do Teorema 2.3.

Exercício 3.2 *Demonstre que toda bola aberta de um espaço métrico é um conjunto aberto. (Compare como o Exercício 2.1).*

Cada espaço métrico define assim um espaço topológico. É importante porém distinguir os dois conceitos pois dois espaços métricos podem definir o mesmo espaço topológico, e existem espaços topológicos cujas topologias não podem ser definidas por uma métrica. O primeiro ponto pode ser visto facilmente pois se d é uma métrica, $2d$ também o é; assim (X, d) e $(X, 2d)$ são espaços métricos diferentes mas evidentemente definem os mesmos conjuntos abertos, e assim as mesmas topologias.

Exercício 3.3 *Mostre que a topologia do espaço de Sierpinski* $X = \{1, 2\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1\}\}$ *não pode ser definida por uma métrica.*

Exercício 3.4 *Mostre que a topologia definida pelo espaço métrico do Exemplo 3.2 (d) é a discreta.*

Definição 3.5 *Sejam* $(X, \mathcal{T}_X)$ *e* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *dois espaços topológicos e* $f : X \to Y$ *uma aplicação. Diz-se que* f *é* contínua *se e somente se* $U \in \mathcal{T}_Y \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$. *Em outras palavras, imagens inversas de abertos de* Y *são abertos de* X.

Exercício 3.5 *Seja* $X = \mathbb{R}$ *e sejam* $\mathcal{T}_1$ *a topolocia usual e* $\mathcal{T}_2$ *a topologia do Exemplo 3.1 (d).*

(a) *Mostre que uma função* $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ *é contínua se e somente se ela é* semicontínua inferiormente*; isto é dado* $x \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ *tal que* $|y - x| < \delta \Rightarrow f(y) > f(x) - \epsilon$

(b) *Mostre que uma função* $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ *é contínua se e somente se ela é não decrescente e contínua a direita; isto é* $x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ *e* $f(x) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} f(x - \epsilon)$.

(c) *Mostre que uma função* $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ *é contínua se, e somente se, ela é constante.*

Teorema 3.2 *Dados tres espaços topológicos* $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$, $(Z, \mathcal{T}_Z)$ *e aplicações contínuas* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, *a aplicação* $g \circ f : X \to Z$ *é contínua.*

Demonstração: Seja $U \in \mathcal{T}_Z$, temos $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ Sendo g contínua $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Y$ e sendo f contínua $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{T}_X$. $\diamondsuit$

Assim compostas de funções contínuas são contínuas. Em espaços métricos a continuidade pode ser definida também por meio do conceito de uma sequência convergente.

Definição 3.6 *Seja* $(x_k)_{k=1,2,...}$ *uma sequência de pontos de um espaço métrico* (X, d)*. Diz-se que a sequência*converge para $x \in X$ *e escreva-se* $x_k \to x$ *se e somente se para todo* $r > 0$ *existe um* K *tal que* $n \geq K \Rightarrow x_k \in B_r(x)$*.*

Em outras palavras, dado qualquer bola aberta centrado em X, a sequência é contida na bola para todo índice maior que um certo número K.

Exercício 3.6 *Mostre que* $x_k \to x \Leftrightarrow d(x_k, x) \to 0$*.*

Teorema 3.3 *Seja* $f : X. \to Y$ *uma aplicação entre dois espaços métricos* (X, d_X) *e* (Y, d_Y)*. As seguintes tres afirmações sã o equivalentes:*

(a) f *é contínua.*

(b) *Para todo* $x \in X$ *e todo* $\epsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que* $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$*.*

(c) $x_k \to x \Rightarrow f(x_k) \to f(x)$*.*

A demonstração segue a mesma linha que a do Teorema 2.1. A continuidade em espaços métricos gerais assim tem uma forte analogia com a continuidade nos espaços $\mathbb{R}^n$ em particular. Em análise real além do conceito de continuidade de uma aplicação existe o conceito de continuidade de uma aplicação *num ponto*. Para introduzir este conceito em espaços topológicos, precisamos do conceito de uma vizinhança de um ponto.

Definição 3.7 *Sejam* $(X, \mathcal{T})$ *um espaço topológico e* $x \in X$ *Diz-se que* $N \subset X$ *é uma* vizinhança *de* x *se e somente se existe um aberto* A *tal que* $x \in A \subset N$*.*

Em outras palavras, N é uma vizinhanca de x se e somente se é possível interpor um aberto entre x e N.

Definição 3.8 *O conjunto de todas, as vizinhanças de um ponto* x *de um espaço toplogico chama-se o* sistema completo de vizinhanças *de* x*, ou o* filtro de vizinhanças *de* x*.*

Veremos a razão do nome "filtro" mais adiante.

Cuidado: Muitos textos requerem, que uma vizinhança seja aberta, considerando assim somente as vizinlianças abertas. Aqui não o faremos.

Teorema 3.4 *Um subconjunto $S \subset X$ de um espaço topológico é aberto se e somente se ele é uma vizinhança de cada um dos seus pontos.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Se S é aberto e $x \in S$ então o próprio S serve como o aberto A que interpomos entre x e S; isto é, $x \in S \subset S$. Logo S é vizinhança de cada um dos seus pontos.

($\Leftarrow$) Suponha S vizinhança de cada $x \in S$, logo existe um aberto A_x tal que $x \in A \subset S$, ou seja $\{x\} \subset A_x \subset S$. Mas agora $S = \cup_{x \in S}\{x\} \subset \cup_{x \in S} A_x \subset \cup_{x \in S} S = S$, logo $S = \cup_{x \in S} A_x$ e sendo uma reunião de abertos, S é aberto. $\diamondsuit$

Definição 3.9 *Sejam $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dois espaços topolõgicos $x_0 \in X$ e $f : X \to Y$ uma aplicação. Diz-se que f é* continua em x_0 *se e somente se dada qualquer vizinhança N de $f(x_0)$, $f^{-1}(N)$ é uma vizinhança de x_0.*

Teorema 3.5 *Sejam $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ e $(Z, \mathcal{T}_Z)$ três espaços topolõgicos e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ duas aplicações. Se f é contínua em x_0 e g continua em $f(x_0)$ então $g \circ f$ é contínuo em x_0.*

Demonstração: Seja N uma vizinahnça de $(g \circ f)(x_0) = g(f(x_0))$, então $(g \circ f)^{-1}(N) = f^{-1}(g^{-1}(N))$ mas pela continuidade de g em $f(x_0)$ segue que $g^{-1}(N)$ e uma vizinhança de $f(x_0)$ e pela continuidade de f em x_0 segue que $f^{-1}(g^{-1}(N))$ é uma vizinhança de x_0. Logo $g \circ f$ é contínuo em x_0. $\diamondsuit$

Teorema 3.6 *Uma aplicação $f : X \to Y$ entre dois espaços topolõgicos $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ é contínua se e somente se ela é contínua em cada ponto.*

Demonstração: Seja f contínua, $x \in X$ e N uma vizinhança de $f(x)$. Existe um aberto A tal que $f(x) \in A \subset N$, logo $x \in f^{-1}(A) \subset f^{-1}(N)$. Pela continuidade de f, $f^{-1}(A)$ é aberto, logo $f^{-1}(N)$ é uma vizinhança de x e f é contínuo em x. Suponha f contínua em cada ponto e $U \subset Y$ um aberto. Se $x \in f^{-1}(U)$ então $f(x) \in U$ e sendo U aberto, pelo Teorema 3.4 ele é vizinhança de $f(x)$, logo $f^{-1}(U)$ é vizinhança de x pela continuidade de f em x. Sendo x arbitrário, temos pelo Teorema 3.4 de novo que $f^{-1}(U)$ é aberto e assim f é contínua. $\diamondsuit$

Exercício 3.7 *Mostre que as condiçoes (b) e (c) do Teorema 3.3 equivale a f ser contínua no ponto x.*

As vizinhanças de um ponto num espaço topológico muitas vezes desempenham um papel semelhante ao sistema de bolas abertas centrado num ponto de um espaço métrico. Podem ser utilizadas por exemplo para definir convergência de sequências num espaço topo1ógico.

Definição 3.10 *Sejam* $(X, \mathcal{T})$ *um espaço topológico e* $(x_k)_{k=1,2,\ldots}$ *uma sequência de pontos de* X. *Diz-se que* x_k converge para x *e escreve-se* $x_k \to x$ *se e somente se dado qualquer vizinhança* N *de* x, *existe um* $K > 0$ *tal que* $k \geq K \Rightarrow x_k \in N$. *Em outras palavras a sequência eventualmente entra e fica dentro de qualquer vizinhança de* x.

Exercício 3.8

(a) Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço indiscreto, mostre que qualquer sequência converge para qualquer ponto.

(b) Seja $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ o espaço do Exemplo 3.1 (d) mostre que $x_k \to x \Leftrightarrow \liminf x_k \geq x$.

(c) Seja X um conjunto não enumerável e $\mathcal{T}$ formado pelo conjunto vazio e complementos de conjuntos enumeráveis. Mostre que $x_k \to x$ se e somente se existe um K tal que $k > K \Rightarrow x_k = x$ Em outras palavras a sequencxa é eventualmente constante.

Teorema 3.7 *Seja* $f : X \to Y$ *uma aplicação entre dois espaços topológicos. Se* f *é contínua em* $x \in X$ *então* $x_k \to x \Rightarrow f(x_k) \to f(x)$.

Demonstração: Seja f contínua em x, $x_k \to x$, e N uma vizinhança de $f(x)$. Pela continuidade, $f^{-1}(N)$ é uma vizirihança de x e assim existe um K tal que $k \geq K \Rightarrow x_k \in f^{-1}(N) \Rightarrow f(x_k) \in N$ logo $f(x_k) \to f(x)$. $\diamondsuit$

Cuidado: A recíproca do Teorema 3.7 não é verdadeira em espaços topológicos gerais. A continuidade em espaços topológicos não pode ser determinada assim por sequências convergentes como nos espaços métricos. Mais adiante veremos a geralização do conceito de convergência que reestabelecerá a equivalência num teorema que generalizará o Teorema 3.7.

Exercício 3.9 *Considere o intervalo*$[0, 1]$ *com topologia do Exercício 3.8 (c). Mostre que nem toda função* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *é contínua , mas que toda função satisfaz* $x_k \to x \Rightarrow f(x_k) \to f(x)$. *Aqui* $\mathbb{R}$ *tem a topologia usual.*

Num espaço topológico é util pensar nos abertos como "amostras típicas" do espaço. Dado um subconjunto $S \subset X$ qualquer, é de intreresse determinar até que ponto ele contem um aberto.

Definição 3.11 *Seja $S \subset X$ um subconjunto de um espaco toplógico $(X, \mathcal{T})$ define-se o* interior *S° de S como sendo a reunião de todos os abertos contitos em S*

$$S^\circ = \bigcup \{U \,|\, U \subset S,\, U \text{ aberto}\}.$$

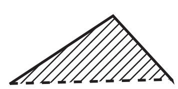
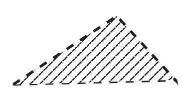
Uma definição equivalente seria dizer que S° é o maior aberto contido em S. Claramente S° é um aberto contido em S sendo uma reunião de abertos contido em S. Por outro lado se $A \subset S$ e A é aberto, então A é um dos conjuntos da reunião que define S° , log $A \subset S^\circ$ e S° é o maior tal aberto.

Exemplo 3.3

(a) $X = \mathbb{R}$, $S = [0, 1)$, $S^\circ = (0, 1)$

(b) $X = \mathbb{R}$, $S = \{1\}$, $S^\circ = \emptyset$

(c) $X = \mathbb{R}$, $S = \mathbb{Q}$, *o conjunto de números racionais* $S^\circ = \emptyset$

(d) $X = \mathbb{R}^2$, $S =$  , $S^\circ =$ 

Teorema 3.8 *O interior satisfaz as seguintess propriedades:*

(a) $S^\circ \subset S$

(b) S *aberto* $\Leftrightarrow S^\circ = S$

(c) $x \in S^\circ \Leftrightarrow S$ *é vizinhança de* $x \Leftrightarrow$ *existe uma vizinhancca* N *de* x *tal que* $x \in N \subset S$

(d) $S^{\circ\circ} = S^\circ$

(e) $S \subset T \Rightarrow S^\circ \subset T^\circ$

(f) $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$

Demonstração: Demonstraremos somente a parte (f). Temos $S^\circ \subset S$ e $T^\circ \subset T$ logo $S^\circ \cap T^\circ \subset S \cap T$ mas sendo $S^\circ \cap T^\circ$ aberto concluimos que $S^\circ \cap T^\circ \subset (S \cap T)^\circ$. Por outro lado se $x \in (S \cap T)^\circ$ então por (c) $S \cap T$ é uma vizinhança de x logo S e T são ambos vizinhanças de x e assim $x \in S^\circ$ e $x \in T^\circ$. Segue que $x \in S^\circ \cap T^\circ$ e $(S \cap T)^\circ \subset S^\circ \cap T^\circ$. Combinando com a inclusão anterior a igualdade segue. $\diamondsuit$

Exercício 3.10 *Demonstre (a)-(e) do Teorema 3.8.*

É importante observar que a afirmação análoga ao (f) do Teorema 3.8 para a reunião não é valida.

Exercício 3.11 *Mostre que* $(S \cup T)^\circ \supset S^\circ \cup T^\circ$ *e dê um exemplo de inclusão estrita.*

O interior S° pode ser considerado como uma aproximação do conjunto S por um conjunto menor de tipo especial, a saber, um aberto. Se agora considerarmos uma aproximação ao S^c , teriamos $S^{c\circ}$ cujo complemento $S^{c\circ c}$ seria um conjunto maior que S e também de tipo especial sendo complemento de um aberto.

Definição 3.12 *Um subconjunto* $F \subset X$ *de um espaço topológico chama-se* fechado *se e somente se ele é complemento de um aberto.*

Exercício 3.12 *Mostre que num espaço métrico* (X, d) *a bola fechada* $D_r(x) = \{y \mid d(x, y) \leq r\}$ *de raio* r *e centro* x *é um conjunto fechado.*

Teorema 3.9 *O conjunto* $\mathcal{C}$ *de conjuntos fechados de um espaço topológico* $(X, \mathcal{T})$ *satisfaz:*

(a) $\emptyset\, ,\, X \in \mathcal{C}$

(b) $E\, ,\, F \in \mathcal{C} \Rightarrow E \cup F \in \mathcal{C}$

(c) *Se* $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ *é uma família de elementos de* $\mathcal{C}$ *então* $\cap_{\alpha \in \mathcal{C}} F_\alpha \in \mathcal{C}$.

A demonstração do teorema é imediata passando aos complementos utilizando a Definição 3.1 de um espaço topo1ógico.

É importante frizar o fato de que os conceitos de aberto e fechado não formam uma dicotomia. Por exemplo o conjunto $[0, 1)$ em $\mathbb{R}$ com a topologia usual nem é aberto nem é fechado, e o conjunto $\emptyset$ é ao mesmo tempo aberto e fechado.

Definição 3.13 *Seja $S \subset X$ um subconjunto de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ define-se o* fecho $\overline{S}$ *de S como sendo a interseção de todos os conjuntos fechados que contém S:*

$$\overline{S} = \bigcap \{F \mid F \supset S,\ F \text{ fechado}\}$$

Esta definição equivale a dizer que $\overline{S}$ é o menor fechado que contém S por um argumento análogo ao que segue a Definição 3.11 do interior de S.

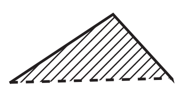
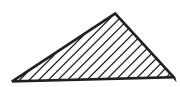
Exercício 3.13 *Mostre que $\overline{S} = S^{coc}$.*

Exemplo 3.4 *(Compare com o Exemplo 3.3)*

(a) $X = \mathbb{R}$, $S = [0, 1)$, $\overline{S} = [0, 1]$

(b) $X = \mathbb{R}$, $S = \{1\}$, $\overline{S} = \{1\}$

(c) $X = \mathbb{R}$, $S = \mathbb{Q}$, *o conjunto de números racionais* $\overline{S} = \mathbb{R}$

(d) $X = \mathbb{R}^2$, $S =$ , $\overline{S} =$ 

Exercício 3.14 *Dê um exemplo num espaço métrico de uma bola fechada $D_r(x)$ não ser igual ao fecho da bola aberta correspondente a $B_r(x)$.*

Teorema 3.10 *O fecho satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $S \subset \overline{S}$

(b) S *é fechado* $\Leftrightarrow \overline{S} = S$

(c) $x \in \overline{S} \Leftrightarrow$ *toda vizinhança N de x contém pontos de S. Isto é $N \cap S \neq \emptyset$ para toda vizinhança N de x.*

(d) $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$

(e) $S \subset T \Rightarrow \overline{S} \subset \overline{T}$

(f) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$

Demonstração: Demonstramos aqui somente a propriedade (c), as outras seguem das propriedades correspondente do interior por argumentos simples. Tem-se $x \in \overline{S} \Leftrightarrow x \in S^{coc} \Leftrightarrow x \notin S^{co}$ e pela parte (c) do Teorema 3.8 isto equivale a dizer que nenhuma vizinhança de x é contida em S^c, ou seja que toda vizinhança de x contém pontos de S. $\diamondsuit$

Teorema 3.11 *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $S \subset X$. Se $x_k \in S$ e $x_k \to x$ então $x \in \overline{S}$.*

Demonstração: Seja N uma vizinhança de x e sendo que $x_k \to x$ exist um K tal que $k \geq K \Rightarrow x_k \in N$ logo N contém um ponto de S e pelo critério (c) do Teorema 3.10 , $x \in \overline{S}$. $\diamondsuit$

Exercício 3.15 *Mostre que a recíproca do Teorema 3.11 não é verdadeira. Dê exemplo de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, um $S \subset X$, um $x \in \overline{S}$ tal que não exsiste uma sequência $x_k \to x$ com $x_k \in S$. Compare com o Exercício 3.8 (c).*

Teorema 3.12 *Seja(X, d), um espaço métrico e $S \subset X$. Então $x \in \overline{S} \Leftrightarrow$ existe uma sequência $x_k \in S$ tal que $x_k \to x$.*

Demonstração: A suficiência é válida em geral pelo Teorema 3.11. Suponha então que $x \in \overline{S}$. As bolas $B_{1/k}(x)$ são vizinhanças de x e pelo critério (c) do Teorema 3.10 existe um $x_k \in S \cap B_{1/k}(x)$. Agora, $x_k \to x$ pois $d(x_k, x) \leq 1/k \to 0$ $\diamondsuit$

Exercício 3.16 *Mostre que $\overline{S \cap T} \subset \overline{S} \cap \overline{T}$ e dê um exemplo onde a inclusão é estrita.*

Notemos que $S^\circ \subset S \subset \overline{S}$ e que todos os tres conjuntos podem ser diferentes.

O conjunto $\overline{S} \setminus S^\circ$ é então a diferença entre as duas aproxi-mações por conjuntos especiais.

Definição 3.14 *Seja $S \subset X$ um subconjunto de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$. A* fronteira *∂S de S é definida como $\overline{S} \setminus S^\circ$, isto é, a parte do fecho não contida no interior.*

Teorema 3.13 *A fronteira satisfaz:*

(a) $\partial S = \overline{S} \cap \overline{S^c} = \partial S^c$

(b) $\overline{S} = S^\circ \cup \partial S$ *sendo que os dois conjuntos são disjuntos.*

(c) $X = S^\circ \cup \partial S \cup S^{c\circ}$ *sendo que os tres conjuntos são disjuntos.*

(d) $x \in \partial S \Leftrightarrow$ *toda vizinhança* N *de* x *contem pontos de* S *e de* S^c

Demonstração:

(a) $\partial S = \overline{S} \setminus S^\circ = \overline{S} \cap S^{\circ c} = \overline{S} \cap S^{cc\circ c} = \overline{S} \cap \overline{S^c}$ e sendo esta expressão simétrica em S e S^c concluimos que $\partial S = \partial S^c$

(b) Esta afirmação segue imediatamente da definição de ∂S.

(c) Note que $\overline{S}^c = S^{c\circ cc} = S^{c\circ}$ e use a parte (b) para conconcluir a fórmula dada.

(d) Use (a) e o Teorema 3.10 (c).

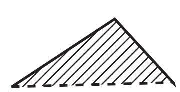
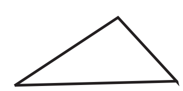
$\diamondsuit$

Exemplo 3.5 *(Compare com os exemplos 3.4 e 3.3)*

(a) $X = \mathbb{R}$, $S = [0, 1)$, $\partial S = \{0, 1\}$

(b) $X = \mathbb{R}$, $S = \{1\}$, $\partial S = \{1\}$

(c) $X = \mathbb{R}$, $S = \mathbb{Q}$, *o conjunto de números racionais* $\partial S = \mathbb{R}$

(d) $X = \mathbb{R}^2$, $S =$ , $\partial S =$ 

Capítulo 4

Construção de topologias

Uma topologia num conjunto X é uma família de subconjuntos. Esta família pode ser definida indiretamente por meio de certas construções. Apresentamos aqui os mais últeis destas, junto com critérios de continuidade de aplicações.

Consideremos primeiro topologias definidas em termos de conjuntos fechados.

Teorema 4.1 *Seja X um conjunto e $\mathcal{C}$ uma família de subconjuntos que satisfaz as propriedades (a)-(c) do Teorema 3.9. Então $\mathcal{T} = \{U \subset X \,|\, U^c \in \mathcal{C}\}$ é uma topologia cuja família de conjuntos fechados coincide com $\mathcal{C}$.*

A demonstração é imediata.

Nós já vimos topologias definidas desta maneira, por exemplo, a topologia cujos abertos são $\emptyset$ ou complementos de conjuntos finitos pode ser mais facilmente definido como a topologia cujos conjuntos fechados são X os conjuntos finitos.

Teorema 4.2 *Sejam$(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dois espaços topológicos com famílias $\mathcal{C}_X$ e $\mathcal{C}_Y$ de conjuntos fechados respectivamente. Uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua se e somente se $F \in \mathcal{C}_Y \Rightarrow f^{-1}(F) \in \mathcal{C}_X$. Em outras palavras, imagens inversas de fechados são fechados.*

Demonstração: Para qualquer $S \subset Y$ tem-se $f^{-1}(S) = (f^{-1}(S^c))^c$. Sendo que $S \in \mathcal{C}_Y \Leftrightarrow S^c \in \mathcal{T}_Y$ segue que $f^{-1}(\mathcal{T}_Y) \subset \mathcal{T}_X \Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{C}_Y) \subset \mathcal{C}_X$. $\diamondsuit$

Exercício 4.1 *Seja $(x, \mathcal{T})$ um espaço topológico cujos fechados são X ou conjuntos finitos. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua onde $\mathbb{R}$ tem a topologia usual. Mostre que se f não é constante, cada valor é assumido somente num número finito de pontos.*

Exercício 4.2 *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas num espaço topológico $(X, \mathcal{T})$. Mostre que o conjunto $\{x \mid f(x) = g(x)\}$ é fechado.*

Estudamos agora topologias definidas por meio de vizinhanças.

Teorema 4.3 *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e para todo $x \in X$ seja $\mathcal{V}_x = \{N \subset X \mid N$ é vizinhança de $x\}$, o sistema de vizinhanças de x. A família $(\mathcal{V}_x)_{x \in X}$ de sistemas de vizinhanças satisfaz*

(a) $\mathcal{V}_x \neq \emptyset$

(b) $N \in \mathcal{V}_x \Rightarrow x \in N$

(c) $N \in \mathcal{V}_x$, $M \supset N \Rightarrow M \in \mathcal{V}_x$

(d) $N, M \in \mathcal{V}_x \Rightarrow N \cap M \in \mathcal{V}_x$

(e) $N \in \mathcal{V}_x \Rightarrow \exists W \subset N$, $W \in \mathcal{V}_x$ *tal que para todo* $y \in W$, $W \in \mathcal{V}_y$

A demonstração é imediata lembrando que $N \in \mathcal{V}_x$ se e so-mente se é possível interpor entre x e N um aberto A; isto é, $x \in A \subset N$.

Exercício 4.3 *Demonstre as propriedades (a)-(e) do Teorema 4.3*

Teorema 4.4 *Seja X um conjunto e para todo $x \in X$ seja dado um conjunto $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{P}(X)$ tal que a família $(\mathcal{V}_x)_{x \in X}$ satisfaz as propriedades (a)-(e) do Teorema 4.3. Seja $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ a família de subconjuntos $U \subset X$ que satisfazem $x \in U \Rightarrow U \in \mathcal{V}_x$ Então $\mathcal{T}$ é uma topologia tal que $\mathcal{V}_x$ é o sistema completo de vizinhanças do ponto x.*

Demonstração: Demonstramos primeiro que $\mathcal{T}$ é uma topologia. O conjunto vazio pertence a $\mathcal{T}$ por falta de pontos. O conjunto X pertence a $\mathcal{T}$ por (a) e (e) pois destes segue que $X \in \mathcal{V}_x$ para todo x . Sejam agora $U, V \in \mathcal{T}$ e $x \in U \cap V$. Temos $U, V \in \mathcal{V}_x$ e por (d) então $U \cap V \in \mathcal{V}_x$ e sendo x arbitrário, $U \cap V \in \mathcal{T}$. Se agora $G_\alpha \in \mathcal{T}, \alpha \in A$ e $x \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ então $x \in G_\beta$ para algum β e $G_\beta \in \mathcal{V}_x$ pois $G_\beta \in \mathcal{T}$. Por (c) concluimos que $\bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha \in \mathcal{V}_x$ e sendo x arbitrário $\bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha \in \mathcal{T}$. Assim $\mathcal{T}$ é uma topologia.

Seja agora $\mathcal{W}_x$ o sistema completo de vizinhanças de x em relação a topologia $\mathcal{T}$ e seja $N \in \mathcal{W}_x$. Assim existe um aberto A tal que $x \in A \subset N$, mas $A \in \mathcal{V}_x$ por definição de $\mathcal{T}$ e logo $N \in \mathcal{V}_x$ por (c). Segue-se então que $\mathcal{W}_x \subset \mathcal{V}_x$. Por outro lado se $N \in \mathcal{V}_x$ e se W é o conjunto cuja existência é afirmada pela propriedade (e) então $W \in \mathcal{T}$ pela definição de $\mathcal{T}$ e sendo $x \in W \subset N$ concluímos que $N \in \mathcal{W}_x$. Segue-se a outra inclusão $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{W}_x$ e concluímos $\mathcal{V}_x = \mathcal{W}_x$. $\diamondsuit$

O critério de continuidade de uma aplicação por meio de vizinhanças é contido na Definição 3.9 e Teoréma 3.6.

As operaçẽs $S \mapsto S^\circ$, $S \mapsto \bar{S}$, $S \mapsto \partial S$ qué podem ser consideradas como aplicações $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, são definidos em qualquer espaço topológico. É interessante porém que estas operações por sua vez determinam a topologia. Estudaremos aqui esta possibilidade somente para o caso do fecho que é a situação mais comum na prática.

Definição 4.1 *Seja X um conjunto. Uma aplicação $S \to \overline{S}$ de $\mathcal{P}(X)$ em $\mathcal{P}(X)$ chama-se* fecho de Kuratowski *se e somente se satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $\overline{\emptyset} = \emptyset$

(b) $S \subset \overline{S}$

(c) $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$

(d) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$

Notemos que a operação de fecho num espaço topológico é um fecho de Kurotowski.

Lema 4.1 *Se $S \to \overline{S}$ é um fecho de Kurotowski então $S \subset T \to \overline{S} \subset \overline{T}$*

Demonstração: $S \subset T \Leftrightarrow S \cup T = T \Rightarrow \overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T} = \overline{T} \Leftrightarrow \overline{S} \subset \overline{T}$ $\diamondsuit$

Exercício 4.4 *Sejam X e Y conjuntos e $f : X \to Y$ uma aplicação. Mostre que $S \to f^{-1}(f(S))$ é um fecho de Kurotowski.*

Exercício 4.5 *Seja X um conjunto e $\mathcal{F}$ uma família de funções $f : X \to \mathbb{R}$ que contém a função zero, tal que $f, g \in \mathcal{F} \Rightarrow fg \in \mathcal{F}$ e tal que para todo $x \in X$ existe um $f \in \mathcal{F}$ com $f(x) \neq 0$. Defina a aplicação $\mathcal{J} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(\mathcal{F})$ por $\mathcal{J}(S) = \{f \in \mathcal{F} \,|\, f(S) = 0\}$ e uma aplicação $Z : \mathcal{P}(\mathcal{F}) \to \mathcal{P}(X)$ por $Z(F) = \{x \,|\, f(x) = 0, f \in \mathcal{F}\}$. Em outras palavras $\mathcal{J}(S)$ e o conjunto de funções de $\mathcal{F}$ que se anulam em cada ponto de S, e $Z(F)$ e o conjunto dos zeros comuns a todas as funções em F. Demonstre que a operação $S \to \overline{S} = Z(J(S))$ é um fecho de Kurotowski. Esta construção é muito comum em álgebra.*

Teorema 4.5 *Sejam X um conjunto e $S \to \overline{S}$ um fecho de Kurotowski. Seja $\mathcal{C}$ a família de subconjuntos $S \in X$ tais que $\overline{S} = S$. Então $\mathcal{C}$ e a família de conjuntos fechados de um espaço topológico cuja operação de fecho coincide com a dada.*

Demonstração: Demonstraremos primeiro que $\mathcal{C}$ satisfaz as propriedades (a)-(c) do Teorema 3.9. Temos $\emptyset \in \mathcal{C}$ pela propriedade (a) do fecho de Kurotowski. Sendo que $X \subset \overline{X}$ por propriedade (b) e $\overline{X} \subset X$, concluimos que $\overline{X} = X$ e $X \in \mathcal{C}$. Suponha agora $S, T \in \mathcal{C}$, então $\overline{S} = S$ e $\overline{T} = T$ mas assim $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T} = S \cup T$ e $S \cup T \in \mathcal{C}$. Finalmente suponha $S_\alpha \in \mathcal{C}$, $\alpha \in A$ então $\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha \subset S_\beta$ para qualquer β. Pelo Lema 4.1 $\overline{\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha} \subset \overline{S_\beta} \Rightarrow \overline{\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha} \subset \bigcap_{\beta \in A} \overline{S_\beta} = \bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha$ sendo β arbitrário e $S_\alpha \in \mathcal{C}$. Por outro lado $\cap_{\alpha \in A} S_\alpha \subset \overline{\cap_{\alpha \in A} S_\alpha}$ pela propriedade (b) e assim $\overline{\cap_{\alpha \in A} S_\alpha} \subset \cap_{\alpha \in A} S_\alpha$ e $\cap_{\alpha \in A} S_\alpha \in\in \mathcal{C}$. Concluimos que $\mathcal{C}$ é a família de conjuntos fechados de uma topologia $\mathcal{T}$. Seja agora $S \to \tilde{S}$ a operação de fecho associada a topologia $\mathcal{T}$. Sendo $\tilde{\tilde{S}} = \tilde{S}$ pela propriedade (c), tem-se $S \in \mathcal{C}$ logo $\tilde{S} \subset \overline{S}$ pois $\tilde{S}$ é o menor fechado mas $\tilde{S} \in \mathcal{C} \Rightarrow \overline{\tilde{S}} = \tilde{S}$ assim $\tilde{S} = \overline{S}$ e as duas operaçoes coincidem. $\diamondsuit$

Exercício 4.6 *Considere o fecho de Kurotowski dado no Exercício 4.4 para o caso especial de $f(x) = x^2, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determine os conjuntos fechados.*

Exercício 4.7 *Considere o fecho de Kurotowski dado no Exercício 4.5 para o caso especial de $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{F}$ sendo a família de polinómios $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determine os conjuntos fechados.*

Teorema 4.6 *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação entre dois espaços topológicos $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$, então f é contínua se e somente se $f(\overline{S}) \subset \overline{f(S)}$ para todo, $S \subset X$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha f continua, então $f^{-1}(\overline{f(S)})$ é fechado e contém S, logo contém $\overline{S}$ e assim $f(\overline{S}) \subset \overline{f(S)}$.

($\Leftarrow$) Suponha $f(\overline{S}) \subset \overline{f(S)}$ e $F \subset Y$ um fechado. Temos $f(\overline{f^{-1}(F)}) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} \subset F$, ou seja $\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(F)$. Logo $f^{-1}(F)$ é fechado e f é contínuo.

$\diamondsuit$

Note que este é um critério de continuidade em termos de imagens de conjuntos pelo f e não em termos de imagens inversas.

É possível definir uma topologia num conjunto X dando somente alguns dos abertos, pois usando reuniões e interseções finitas, outros abertos podem ser construidos.

Definição 4.2 *Uma família $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ de abertos de um espaço topológico (X,T) chama-se* sub-base *para a topologia se cada aberto é uma reunião de interseções finitas de elementos de $\mathcal{S}$.*

Em termos explícitos isto significa que todo aberto G pode ser escrito como

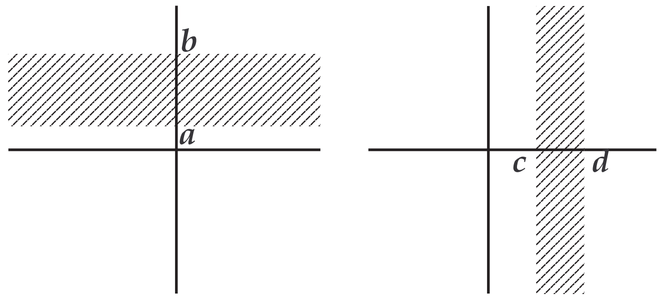
$$G = \bigcup_{\alpha \in A} \bigcap_{\beta \in F_\alpha} S_{\alpha\beta}$$

onde $S_{\alpha\beta} \in \mathcal{S}$, cada conjunto F_α é finito e A um conjunto de índices qualquer. Note que $\emptyset$ é a reunião da família vazia de elementos de $\mathcal{S}$ e X é a interseção da família vazia.

Exemplo 4.1

(a) *O conjunto dos intervalos semifinitos (a, ∞) e $(-\infty, b)$; $a, b \in \mathbb{R}$ é uma sub-base para a topologia de $\mathbb{R}$.*

(b) *O conjunto das faixas horizontais $\mathbb{R} \times (a, b)$ e verticais $(c, d) \times \mathbb{R}$ formam uma sub-base para a topologia de $\mathbb{R}^2$.*



(c) *O conjunto de semiplanos* $\{(x,y)\,|\,y > ax+b\}$ *e* $\{(x,y)\,|\,y < cx+d\}$ *formam uma sub-base para a topologia de* $\mathbb{R}^2$

Note bem que a mesma topologia pode ser definida por sub-bases diferentes como nos casos (b) e (c) do exemplo acima.

Teorema 4.7 *Seja* X *um conjunto e* $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ *uma família qualquer de subconjuntos. Seja* $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ *a família de reuniões de interseções finitas de elementos de* $\mathcal{S}$*. Então* $\mathcal{T}$ *é uma topologia para a qual* $\mathcal{S}$ *é uma sub-base.*

Demonstração: Demonstramos que $\mathcal{T}$ é uma topologia, que $\mathcal{S}$ é uma sub-base para a mesma é óbvio da definição. Evidentemente $\emptyset$, $X \in \mathcal{T}$ sendo reunião e interseção da família vazia de elementos de $\mathcal{S}$. Se $U, V \in \mathcal{T}$ então $U = \bigcup_{\alpha\in A}\bigcap_{\beta\in F_\alpha} S_{\alpha\beta}$ e $V = \bigcup_{\gamma\in C}\bigcap_{\delta\in D_\gamma} T_{\gamma\delta}$ mas $U \cup V) = \bigcup_{\alpha\in A}\bigcup_{\gamma\in C}\bigcap_{\beta\in F_\alpha}\bigcap_{\delta\in D_\gamma}(S_{\alpha\beta}\cap T_{\gamma\delta}) = \bigcup_{(\alpha,\gamma)\in A\times C}\bigcap_{(\beta,\delta)\in F_\alpha\times D_\gamma}(S_{\alpha\beta}\cap T_{\gamma\delta})$ e sendo $F_\alpha \times D_\gamma$ finita para todo α, γ vemos que $U \cap V$ tambem é reunião de interseções finitas de elementos de $\mathcal{S}$. Logo $U \cap V \in \mathcal{T}$. Sejam agora $G_\lambda \in \mathcal{T}$, $\lambda \in L$; então $G_\lambda = \bigcup_{\alpha\in A_\lambda}\bigcap_{\beta\in F_{\alpha\lambda}} S_{\lambda\alpha\beta}$ com $F_{\alpha\lambda}$ finito e $S_{\lambda\alpha\beta} \in \mathcal{S}$. Assim sendo, tem-se $\bigcup G_\lambda = \bigcup_{\lambda\in L}\bigcup_{\alpha\in A_\lambda}\bigcap_{\beta\in F_{\alpha\lambda}} S_{\lambda\alpha\beta}$ o que é de novo uma reunião de interseções finitas de elementos de $\mathcal{S}$. Logo $\mathcal{T}$ é uma topologia. $\diamondsuit$

Se admitirmos somente reuniões para a construção de novos abertos chegamos a uma outra maneira de definir uma topologia.

Definição 4.3 *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Uma famtlia $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ de abertos chama-se uma* base *para a topologia $\mathcal{T}$ se cada aberto é uma reunião de elementos de $\mathcal{B}$. Em termos explícitos isto significa que cada aberto G pode ser escrito como*

$$G = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$$

onde $B_\alpha \in \mathcal{B}$ e A é um conjunto de índices qualquer.

Teorema 4.8 *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma base para $\mathcal{T}$, então $\mathcal{B}$ satisfaz*

(a) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$

(b) *Se B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$ então existe uma família $B_\alpha \in \mathcal{B}$ tal que $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$.*

Estas condições são equivalentes às seguintes:

(a′) $\forall x \in X \, \exists B \in \mathcal{B}$ *tal que* $x \in B$

(b′) *Se B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 \cap B_2$ então $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

Em outras palavras, é possível interpor um elemento de $\mathcal{B}$ entre a interseção de quaisquer dois elementos de $\mathcal{B}$ e qualquer ponto da interseção.

Reciprocamente dado um conjunto X e uma família $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ que satisfaz as condicóes (a) e (b) acima, a família $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ de reuniões de elementos de $\mathcal{B}$ é uma topologia para a qual $\mathcal{B}$ é uma base.

Demonstração:

A demonstração de (a) e (b) é imediata. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma base para a topologia. Sendo X aberto temos $X = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$ para alguma família $B_\alpha \in \mathcal{B}$ Mas assim, dado $x \in X \, \exists \alpha$ tal que $x \in B_\alpha$ e (a) é demonstrado. Sendo agora B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$, os dois conjuntos são abertos e logo $B = B_1 \cap B_2$ é aberto. Assim $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$ para alguma família $B_\alpha \in \mathcal{B}$. Dado um $x \in B_1 \cap B_2$ então existe um $\alpha \in A$ tal que $x \in B_\alpha$. Seja $B_3 = B_\alpha$, demonstrando (b).

Seja agora X um conjunto e $\mathcal{B}$ uma família de subconjuntos satisfazendo (a) e (b). Seja $\mathcal{T}$ formado pelas reuniões de elementos de $\mathcal{B}$. Demonstramos que $\mathcal{T}$ é uma topologia. Sendo $\emptyset$ a reunião da família vazia de elementos de $\mathcal{T}$ temos $\emptyset \in \mathcal{T}$. Por propriedade (a) segue que $X = \bigcup\{B \mid B \in \mathcal{B}\}$ logo, $X \in \mathcal{T}$. Considere agora B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$. Por propriedacle (b) segue que cada $x \in B_1 \cap B_2$ pertence a algum $B \in \mathcal{B}$ com $B \subset B_1 \cap B_2$ e logo $B_1 \cap B_2 = \bigcup\{B \in \mathcal{B} \mid B \subset B_1 \cap B_2\}$. Assim a interseção de dois elementos de $\mathcal{B}$ é uma reunião de elementos de $\mathcal{B}$. Seja agora U, $V \in \mathcal{B}$ onde $U = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$ e $V = \bigcup_{\lambda \in L} G_\lambda$ então $U \cap V = \bigcup\{B_\alpha \cup G_\lambda \mid (\alpha, \lambda) \in A \times L\}$. Cada $B_\alpha \cap G_\lambda$ é reunião de elementos de $\mathcal{B}$, logo $U \cap V$ também é reunião de elementos de $\mathcal{B}$ e pertence a $\mathcal{T}$. Se finalmente $U_\alpha \in \mathcal{T}$, $\alpha \in A$ tem-se $U_\alpha = \bigcup_{\lambda \in L_\alpha} G_{\alpha,\lambda}$ e $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup\{G_{\alpha,\lambda} \mid \alpha \in A, \lambda \in L_\alpha\}$ é uma reuniõ de elementos de $\mathcal{B}$ logo $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$ Assim $\mathcal{T}$ é uma topologia e evidentemente $\mathcal{B}$ é uma base para ela. $\diamondsuit$

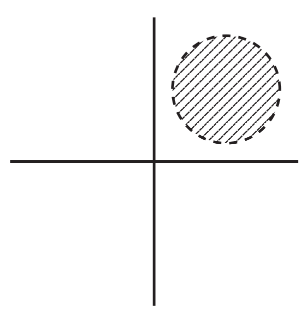
Exemplo 4.2

(a) *Os intervalos abertos* (a, b) *formam uma base para a topologia de* $\mathbb{R}$.

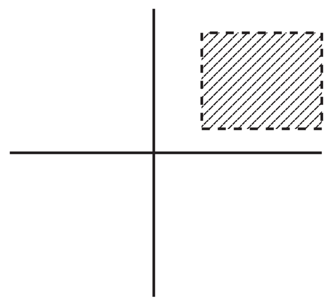
(b) *As bolas abertas* $B_r(x)$ *formam uma base para a topologia de um espaço métrico* (X, d).

(c) *A família de conjuntos unitários* $\{x\}$ *é uma base para a topologia discreta num conjunto* X *cualquer.*

Uma topologia pode ser definida por meio de várias bases diferentes. A topologia de $\mathbb{R}^2$ por exemplo, além de ter as bolas abertas $B_r(x) = \{x \mid \|x - y\| < r\}$ como base,



também pode ser definida tomando retângulos abertos $(a, b) \times (c, d)$



como elementos básicos.

O uso de bases simplifica certas considerações, notemos os seguintes dois teoremas.

Teorema 4.9 *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico com base $\mathcal{B}$ para $\mathcal{T}$.*
Um subconjunto $S \subset X$ é aberto $\Leftrightarrow \forall x \in S\, \exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset S$.

Em outras palavras, um aberto é um subconjunto, tal que é possível interpor um elemento da base entre ele e qualquer dos elementos dele. A demonstração deste fato já deve ser familiar, faça uma reunião sobre os elementos de S.

Teorema 4.10 *Sejam $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$, espaços topológicos com bases $\mathcal{B}_X$, $\mathcal{B}_Y$. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação. Então f é contínua $\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}_Y$, $f^{-1}(B)$ é* aberto *em X.*

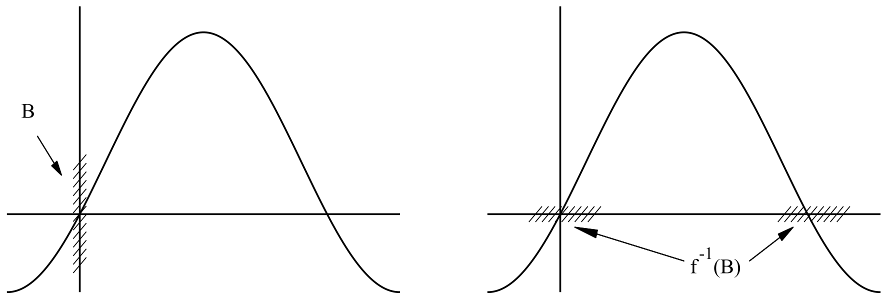
Demonstração:

($\Rightarrow$) f contínua $\Rightarrow f^{-1}(B)$ aberto pois B é aberto.

($\Leftarrow$) Suponha $f^{-1}(B)$ sempre aberto e seja $U \subset Y$ aberto. Então $U = \bigcup_\alpha B_\alpha$, $B_\alpha \in \mathcal{B}_Y$ mas agora $f^{-1}(U) = \bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$ é um aberto.

$\diamondsuit$

Cuidado: $f^{-1}(B)$ não é necessariamente um elemento da base $\mathcal{B}_X$. Considere o seguinte exemplo de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tomando os intervalos abertos (a, b) como base:



Combinando os dois teoremas acima chegamos a um resultado puramente em termos de bases.

Corolário 4.1 *Sejam $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$, espaços topologicos com bases $\mathcal{B}_X$, $\mathcal{B}_Y$. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação. Então f é contínuo $\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}_Y$, $\forall x \in f^{-1}(B)$, $\exists D \in \mathcal{B}_X$, tal, que $x \in D \subset f^{-1}(B)$*

Um critério semelhante pode ser introduzido para continuidacie num ponto. Para isto é preciso um novo conceito de base para os sistemas de vizinhanças.

Definição 4.4 *Sejam (X,T) um espaço topológico $x \in X$ e $\mathcal{V}_x$ o sistema completo de vizinhanças de x. Uma família $B_x \subset \mathcal{V}_x$ de vizinhanças de x chama-se* base de vizinhanças *de x se e somente se para toda vizinhança $N \in \mathcal{V}_x$ existe um elemento $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset N$.*

Exemplo 4.3

(a) *Seja (X, d) um espaço métrico e $\lambda_k > 0$ uma sequência de números tal que $\lambda_k \downarrow 0$. Então $B_{\lambda_k}(x)$ é uma base de vizihnanças de x.*

(b) *A familia de conjuntos $(x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}) \times (y - \frac{1}{k}, y + \frac{1}{k})$ $k = 1, 2, 3 \ldots$ formam uma base de vizinhanças do ponto $(x, y) \in \mathbb{R}$.*

Teorema 4.11 *Sejam $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação. Sejam $\mathcal{B}_{x_0}$ e $\mathcal{B}_{f(x_0)}$ bases para as vizinhanças de $x_0 \in X$ e de $f(x_0) \in Y$. Então f é contínuo em $x_0 \Leftrightarrow \forall B \in B_{f(x_0)}\, \exists D \in \mathcal{B}_{x_0}$ tal que $f(D) \subset B$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha f continua em x_0 e $B \in \mathcal{B}_{f(x_0)}$, então $f^{-1}(B)$ é uma vizinhança de x_0 e logo existe um $D \in \mathcal{B}_{x_0}$ tal que $D \subset f^{-1}(B)$, logo $f(D) \subset B$.

($\Leftarrow$)Suponha a condição da hipótese satisfeita e seja N uma vizinhança de $f(x_0)$, logo existe um $B \in \mathcal{B}_{f(x_0)}$ tal que $B \subset N$. Seja $D \in \mathcal{B}_{x_0}$ tal que $f(D) \subset D$, Segue que $D \subset f^{-1}(N)$ e logo $f^{-1}(N)$ é uma vizinhança de x_0 e f contínua em x_0.

$\diamondsuit$

No caso de espaços métricos com bolas como base de vizinhanças, este critério reduz a um já familiar. Veja (b) do Teorema 3.3

Nós já vimos no Exercício 3.9 que o conceito de continuidade não pode ser controlado em geral por meio de sequências convergentes como no caso de espaços métricos. Usando o conceito de base de vizinhanças é possível porém identificar aqueles espaços topológicos nos quais sequências convergentes determinam a continuidade.

Definição 4.5 *Seja $(x, \mathcal{T})$ um espaço topológico, diz-se que o mesmo satislaz o* primeiro axioma de enumerabiliade *se cada ponto $x \in X$ tem uma base enumerável de vizinhanças.*

Exemplo 4.4

(a) *Todo espaço métrico satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade. Veja Exemplo 4.3*

(b) $\mathbb{R}$ *com a topologia dada por* $\{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{(r, \infty) \,|\, r \in \mathbb{R}\}$ *satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade pois os conjuntos* $\left\{\left(x - \frac{1}{n}, \infty\right) \,|\, n = 1, 2, \dots\right\}$ *é uma base de vizinhanças de x.*

(c) *A topologia do Exercício 3.8 (c) não satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.*

Teorema 4.12 *Sejam $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dois espaços topológicos sendo que $(X, \mathcal{T}_X)$ satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação, então f é contínua em $x \in X$ se e somente se $x_k \to x \Rightarrow f(x_k) \to f(x)$.*

Demonstração: A necessidade já é demonstrada pelo Teorema 3.7. Suponha então que $x_k \to x \Rightarrow f(x_k) \to f(x)$ e f não é contínua em x. Assim existe uma vizinhança N de $f(x)$ tal que, $f^{-1}(N)$ não é uma vizinhança de x. Seja B_k, $k = 1, 2, \ldots$ uma base de vizinhanças de x. Defina os conjuntos $D_k = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_k$ então D_k, $k = 1, 2, \ldots$ também é uma base de vizinhanças e além disto $D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset \cdots$. Sendo que $f^{-1}(N)$ não é uma vizinhança, é possível escolher um $x_k \in D_k \setminus f^{-1}(N)$. Afirmamos que $x_k \to x$ pois se V é uma vizinhança qualquer de x existe um K tal que $D_K \subset V$ mais agora sendo $D_k \subset D_K$ para $k \geq K$ tem-se $x_k \in V$ para $k \geq K$ e $x_k \to x$. Sendo que $f(x_k) \notin N$ temos que $f(x_k) \not\to f(x)$ contradizendo a hipótese. $\diamondsuit$

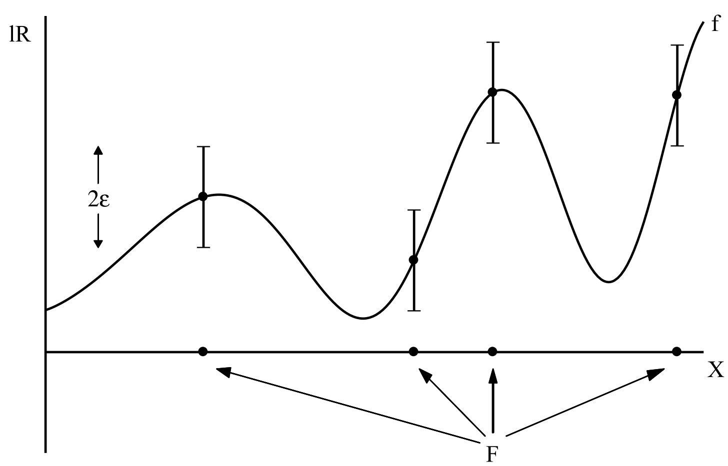
Teorema 4.13 *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico satisfazendo o primeiro axioma de enumerabilidade, e seja $S \subset X$. Então $x \in \bar{S}$ se e somente se existe uma sequencia $x_k \in S$ tal que $x_k \to x$*

Demonstração: A suficiência já foi demonstrada pelo Teorema 3.12 Seja então $z \in \bar{S}$ e D_k uma base de vizinhanças de z tal que $D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset \cdots$ (Veja a construção de D_k na demonstração do teorema anterior). Como $x \in \bar{S}$ existe um $x_x \in D_k$ e evidentemente $x_k \to x$ como na demonstração do teorema anterior. $\diamondsuit$

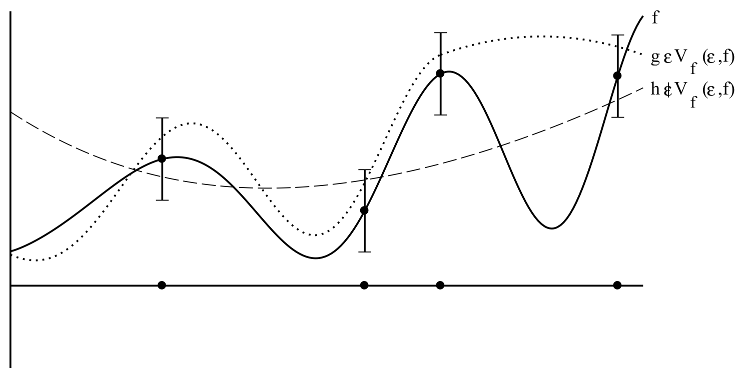
Damos agora um exemplo de como definir umaa topologia dando as vizinhanças por meio de uma hase.

Exemplo 4.5 *Seja X um conjunto qualquer e define, $\mathbb{R}^X$ como o conjunto de todas as aplicações $X \to \mathbb{R}$.*

Vamos definir uma topologia em $\mathbb{R}^X$ (não em X). Seja primeiro $f \in \mathbb{R}^X$ então f é uma aplicação $X \to \mathbb{R}$. Seja agora $\epsilon > 0$, $F \subset X$ conjunto finito. *Defina $V_f(\epsilon, F) = \{g \in \mathbb{R}^X \,|\, |g(x) - f(x)| < \epsilon, x \in F\}$. Para ver o que significa esse conjunto veja o seguinte diagrama:*



Para todo ponto $x \in F$ colocamos uma janela de altura 2ϵ centrada em $f(x)$. Agora $g \in V_f(\epsilon, F)$ se e somente se o seu gráfico passa por todas as janelas.



Agora definimos uma topologia em $\mathbb{R}^X$ exigindo que quando ϵ varia entre todos os números positivos e F entre todos os subconjuntos finitos de X, $V_f(\epsilon, F)$ seja uma base de vizinhanças de f. Essa topologia chama-se topologia fraca *e isso é um dos meios usuais de definí-la.*

Ainda é necessário demonstrar uma série de resultados. Seja $\mathcal{V}_f$ a família de conjuntos que contém algum $V_f(\epsilon, F)$ como subconjunto. Para que os $V_f(\epsilon, F)$ possam ser considerados base de vizinhanças de f é preciso demonstrar que a família $\mathcal{V}_f$ $f \in \mathbb{R}^X$ satisfaz as propriedades (1-5) do Teorema 4.3. Deixamos esta verificaçio ao leitor, como é de costume aliás na literatura matemática.

Na topologia fraca uma função g é considerada perto da função f se os valores de g diferem pouco dos valores de f num número *finito* de pontos.

Observe que em qualquer aplicação onde funções servem como modelos de uma realidade não matemática, para determinar que função reflete uma dada situação temos que recorrer a medidas, mas assim só podemos determinar os valores da função num número finito de pontos e esses valores são certos somente até um grau de precisão. Medindo assim, nós determinamos não uma função mas só uma vizinhança na topologia fraca. A topologia fraca (e outras semelhantes) então reflete a nossa habilidade prática de controlar as funções. Isso leva a certos paradoxos que notaremos agora mas resolveremos mais adiante.

Primeira observação: Se X não é enumerável então f nao tem base enumerável de vizinhanças. Suponha que tenha e seja V_n uma tal base;

como os conjuntos $V_f(\epsilon, F)$ já é uma base podemos achar ϵ_n, F_n tais que $V_f(\epsilon_n, F_n) \subset V_n$ então podemos escolher a base enumerável entre os conjuntos $V_f(\epsilon_n, F_n)$. Seja $N = \cup_n F_n$, como X não é enumerável, $N \neq X$ e então existe um ponto $x_0 \notin N$. Agora uma vizinhança $V_f(\epsilon, \{x_0\})$ nao pode conter nenhuma dos $V_f(\epsilon_n, F_n)$, pois se o grálico de g passa pela janela em $f(x_0)$ isto não obriga ele a passar pelas janelas em $f(x)$, $x \in F_n$. Em geral então a topologia fraca não pode ser controlada por sequências. Mas toda aproximação prática deve ser feita por sequências pois só podemos fazer um número finito de operações num tempo finito. Numa aproximação prática já depois de r passos devemos estar bem próximo. A topologia fraca é então prática de um lado mas imprática de um outro.

Segunda observação: Definimos agora (na mesma maneira, em termos de janelas) a topologia fraca não em R^X mas em $C([0,1], \mathbb{R})$ Isto é o espaço de runções contínuas $[0,1] \to \mathbb{R}$. Considere a operação da integral $f \mapsto \int_0^1 f(x)\,dx$. Esta aplicação não é contínua na topologia fraca em $C([0,1], \mathbb{R})$ e a topologia usual em $\mathbb{R}$. (Pense na integral como função $C([0,1], \mathbb{R}) \xrightarrow{I} \mathbb{R}$). Para ver isso usamos o Teorema 4.11. Se ela for contínua então para todo $\epsilon > 0$ existiria uma vizinhança $V_f(\delta, F)$ tal que $g \in V_f(\delta, F) \Rightarrow |I(g) - I(f)| < \epsilon$. Mas dados δ, F podemos escolher um g com $g(x) = f(x)$, $x \in F$ (e então $g \in V_f(\delta, F)$) mas com valores fora do conjunto F tais que $I(g)$ é um número qualquer. Então um tal $V_f(\delta, F)$ não pode existir e a integral não é contínua. Agora se a topologia fraca reflele a nossa habilidade prática de cntrolar funções, porque é que a integral, que não é contínua nessa topologia, ainda é uma ferramenta prática tão boa? Voltaremos de novo a esse assunto num momento oportuno.

Capítulo 5

Comparação de topologias

Precisamos primeiro de certos conceitos a respeito de conjuntos parcialmente ordenados.

Definição 5.1 *Uma* ordem parcial *num conjunto X é uma relação $\leq$ (leia menor ou igual) satisfazendo*

(a) $x \leq x$ *(reflexividade)*

(b) $x \leq y$ *e* $y \leq x \Rightarrow x = y$ *(anti-simetria)*

(c) $x \leq y$ *e* $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ *(transitividade)*

Exemplo 5.1

(a) *Seja $X = \mathcal{P}(Y)$, Y um conjunto qualquer e defina $A \leq B \Leftrightarrow A \subset B$. Isto é, a ordem da inclusão.*

(b) *Seja $X = \mathbb{R}$ defina $r \leq s$ como a ordem usual.*

(c) *Seja $X = C([0,1], \mathbb{R})$; defina $f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \forall x \in [0,1]$. A mesma ordem pode ser introduzida em $X = \mathbb{R}^Y$, Y um conjunto.*

Definição 5.2 *Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $A \subset X$.*

(a) $b \in X$ *é uma* cota superior *de* $A \Leftrightarrow a \leq b \,\forall\, a \in A$.

(b) $b \in X$ *é uma* cota inferior *de* $A \Leftrightarrow b \leq a \,\forall\, a \in A$.

(c) $a \in A$ *é* elemento maximal *de* $A \Leftrightarrow a' \in A$ *e* $a' \geq a \Rightarrow a' = a$.

(d) *$a \in A$ é um* elemento minimal *de* $A \Leftrightarrow a' \in A$ *e* $a' \leq a \Rightarrow a' = a$.

(e) *$a \in A$ é o* máximo *de* $A \Leftrightarrow a \geq a' \, \forall \, a' \in A$.

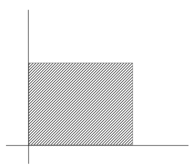
(f) *$a \in A$ é o* mínimo *de* $A \Leftrightarrow a \leq a' \, \forall \, a' \in A$.

(g) *$b \in X$ é o* supremo *de A ($b = \sup A$)* $\Leftrightarrow$ *b é o mínimo das cotas superiores de A*

(h) *$b \in X$ é o* ínfimo *de A ($b = \inf A$)* $\Leftrightarrow$ *b é o máximo das cotas inferiores de A*

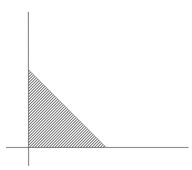
Exemplo 5.2

(a) *Seja* $X = \mathbb{R}^2$ *e introduza a ordem* $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2$ e $y_1 \leq y_2$ *e seja primeiro* $A \subset X$ *o quadrado* $[0,1] \times [0,1]$



então $(1,1)$ *é o mâximo de A e* $(0,0)$ *é o mínimo de A.*

Seja agora A o triângulo



os pontos na hipotenusa são maximais mas nenhum deles é mãximo. Nesse caso $(1,1)$ *é* $\sup A$.

(b) *Em* $\mathcal{P}(X)$ *todo* $G \subset \mathcal{P}(x)$ *tem supremo e ínfimo onde* $\sup G = \cup_{A \in G} A$ *e* $\inf G = \cap_{A \in G} A$.

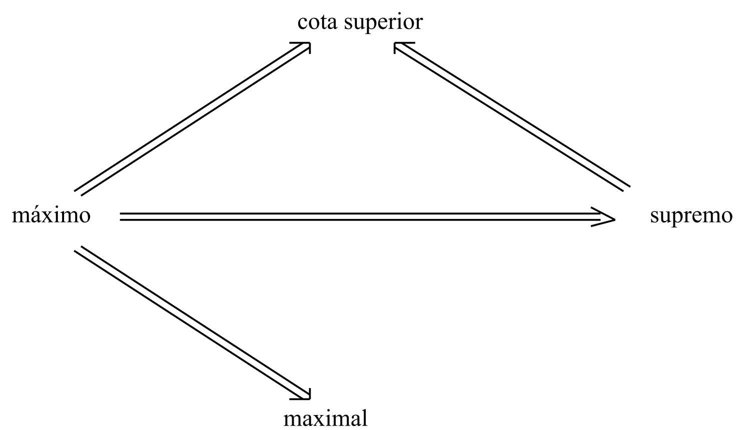
(c) *Em $\mathbb{R}$ todo conjunto cotado superiormente (inferiormente) tem supremo (ínfimo). Por isso R^X goza da mesma propriedade (Exemplo 3) onde o supremo, por exemplo, é computado pontualmente:*

$$(\sup A)(x) = \sup\{a(x) \mid a \in A\}$$

.

O item (a) deste exemplo é desta forma mas interpretado geometricamente ($\mathbb{R}^2$ é da forma $\mathbb{R}^X$ onde X tem só dois pontos)

Entre os quatro conceitos, cota superior, máximo, maximal, supremo as únicas relações lógicas são



para as demais possíveis implicaccões podemos arranjar um contra-exemplo. O memso vale para os conceitos cota inferior, mínimo, minimal, ínfimo, respectivamente.

Definição 5.3 *Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Em todo subconjunto $S \subset X$ introduza uma ordem parcial definindo para dois elementos $s, t \in S$, $s \leq t$ se e somente se isto é verdade para s e t considerados como elementos de X na ordem que já existe lá. Essa ordem chama-se* ordem induzida

Seja agora $A \subset S$, entãoA como subconjunto de S tem o mesmo elemento máximo (se existir) e os mesmos elementos maximais (se existirem) que A encarado como subconjunto de X; mas o supremo de A (se existir) como subconjunto de S em geral não é igual ao de A (se existir) como subconjunto de X. Por exemplo, seja $X = \mathcal{P}(\{1,2,3\})$,$S = \{\{1\},\{2\},\{1,2,3\}\}$, $A = \{\{1\},\{2\}\}$; agora $\sup A$ (em S) $= \{1,2,3\}$ e $\sup A$ (em X) $= \{1,2\}$

Seja agora X um conjunto qualquer e $\mathcal{T}$ uma topologia. Como $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ tem-se $\mathcal{T} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. O conjunto de todas as topologias em X pode ser então ordenada pela ordem induzida da ordem de inclusão em $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. Assim escrevemos $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2 \Leftrightarrow \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, isso quer dizer que todo subconjunto de X aberto em relaccão a $\mathcal{T}_1$ é aberto em relação a $\mathcal{T}_2$.

Definição 5.4 *Se* $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$ *dizemos que* $\mathcal{T}_2$ *é* mais fina *ou* mais forte *que* $\mathcal{T}_1$ *e que* $\mathcal{T}_1$ *é* mais grosseira *ou* mais fraca *que* $\mathcal{T}_2$.

Exemplo 5.3

(a) *Considere* $\mathcal{T}_d$ = *topologia discreta e* $\mathcal{T}$ *qualquer outra topologia. Tem-se*

$$\mathcal{T} \leq \mathcal{T}_d$$

pois $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ *e* $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$.

(b) *Seja* $\mathcal{T}_0$ = *topologia indiscreta e* $\mathcal{T}$ *qualquer outra topologia. Tem-se*

$$\mathcal{T}_0 \leq \mathcal{T}.$$

Assim a topologia discreta é a máxima e a topologia indiscreta a mínima topologia.

(c) *Em* $\mathbb{R}$ *considere* $\mathcal{T}_1$ = *topologia usual,* $\mathcal{T}_2$ = *topologia dado por:* $\{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(r, \infty) \,|\, r \in \mathbb{R}\}$. *Tem-se* $\mathcal{T}_1 > \mathcal{T}_2$ *pois todo* (r, ∞) *é aberto na topologia usual.*

Damos agora vãrios critérios para poder dizer se $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$.

Teorema 5.1 *Sejam* $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ *duas topologias num conjnto* X *e sejam* $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ *bases das mesmas. Tem-se* $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2 \Leftrightarrow \forall\, B \in \mathcal{B}_1$ *e* $\forall\, x \in B\; \exists\, D \in \mathcal{B}_2$ *tal que* $x \in D \subset B$.

Demonstração: Pelo Teorema 4.9 este critério equivale a dizer que todo $B \in \mathcal{B}_1$ é aberto na topologia $\mathcal{T}_2$ e como todo aberto em $\mathcal{T}_1$ é reunião de elementos de $\mathcal{B}_1$ o resultado segue. $\diamondsuit$

Teorema 5.2 *Sejam* $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ *duas topologias num conjunto* X *e sejam para todo* $x \in X$, $\mathcal{B}_x^1$, $\mathcal{B}_x^2$ *bases para as vizinhanças de* x *em* $\mathcal{T}_1$ *e* $\mathcal{T}_2$ *respectivamente. Tem-se:*

$$\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2 \Leftrightarrow \forall\, V \in \mathcal{B}_x^1\; \exists\, W \in \mathcal{B}_x^2$$

tal que $W \subset V$.

Em outras palavras: dentro de toda vizinhança da base de vizinhanças da topologia mais fraca existe uma vizinhança da base da topologia mais forte.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$ e $V \in \mathcal{B}_x^1$ então $x \in V^o$ (interior respeito a $\mathcal{T}_1$) mais agora V^o é aberto em $\mathcal{T}_2$ pois $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$ e então é uma vizinhança respeito a $\mathcal{T}_2$ de x; logo existe um $W \in \mathcal{B}_x^2$ tal que $x \in W \subset V^o$.

($\Leftarrow$) Seja U aberto em $\mathcal{T}_1$, $x \in U$. Como U é aberto ele é vizinhancca de x logo existe um $V \in \mathcal{B}_x^1$ tal que $x \in V \subset U$ mais agora por hipótese existe $W \in \mathcal{B}_x^2$ tal que $x \in W \subset U$ logo U é uma vizinhança de x na topologia $\mathcal{T}_2$ e como x é arbitrãrio U é aberto em $\mathcal{T}_2$. $\diamondsuit$

Exemplo 5.4 *Considere $C([0,1],\mathbb{R})$ com as duas seguintes topologias $\mathcal{T}_1$ é a topologia métrica com $d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$ e $\mathcal{T}_2$ é a topologia fraca.*

Seja $V_f(\epsilon, F)$ uma vizinhança fraca de f e lembrando a descrição dessa vemos que sendo $B_\epsilon(f)$ a bola centrada em f de raio ϵ respeito a métrica d, então $B_\epsilon(f) \subset V_f(\epsilon, F)$, pois se $|f(x) - g(x)| < \epsilon$ em todos os pontos de $[0,1]$ isso é a fortiori verdade nos pontos de F. Como as bolas formam uma base de vizinhanças para $\mathcal{T}_1$ segue-se que $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$.

Para espaccos métricos o último teorema torna-se o seguinte:

Corolário 5.1 *Sejam d_1, d_2 duas métricas num conjunto X e $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ as topologias métricas respectivas. Tem-se $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2 \Leftrightarrow \forall\, x \in X\, \forall\, r > 0\, \exists\, s > 0$ tal que $B_s^2(x) \subset B_r^1(x)$ onde os últimos são bolas das métricas d_1 e d_2 respectivamente.*

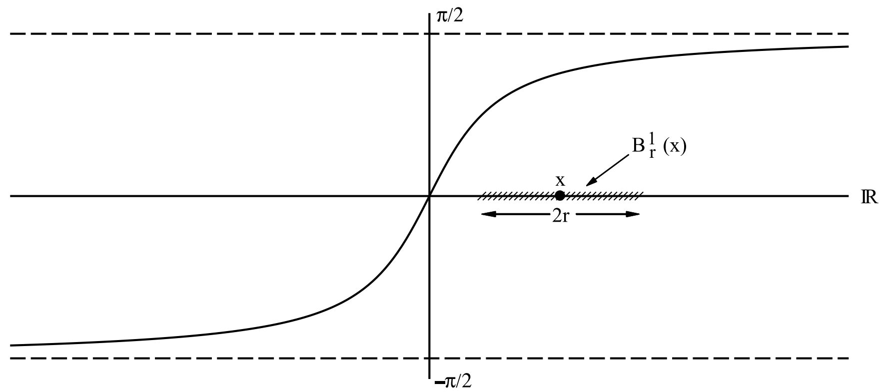
Em outras palavras:

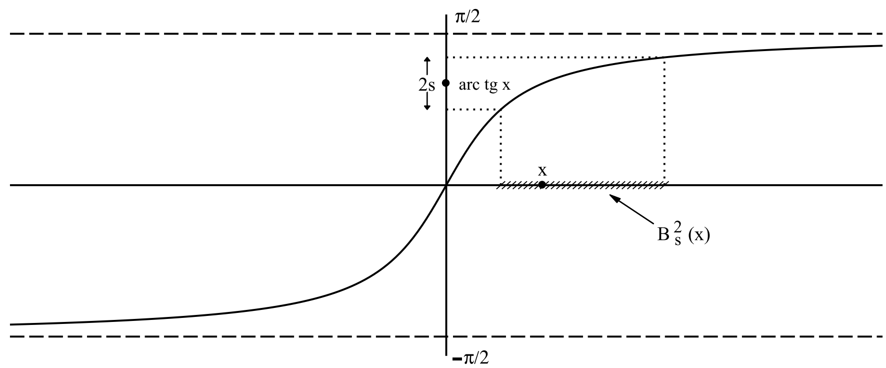
Dentro de toda bola com centro x da topologia mais fraca existe uma bola com centro x da topologia mais forte.

Agora podemos ver que duas métricas podem dar as mesmas topologias. O mais simples exemplo disso é que uma métrica d e qualquer múltiplo λd, $\lambda > 0$ dão as mesmas topologias pois as bolas são as mesmas. Outros exemplos são os seguintes:

Exemplo 5.5

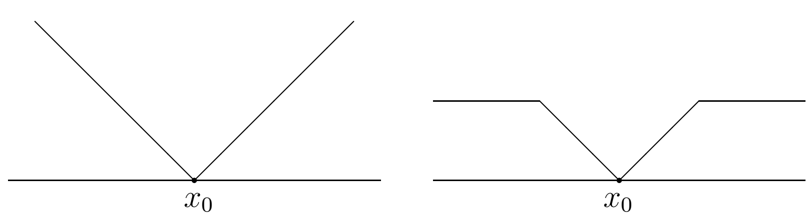
(a) *Em $\mathbb{R}$ considere as duas métricas $d_1(x,y) = |x-y|$, $d_2(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$ essas dão a mesma topologia. A razão disso pode ser visto facilmente pelo grãfico da funç ao* arctan. *As bolas das duas métricas podem ser vistas através dos seguintes diagramas:*



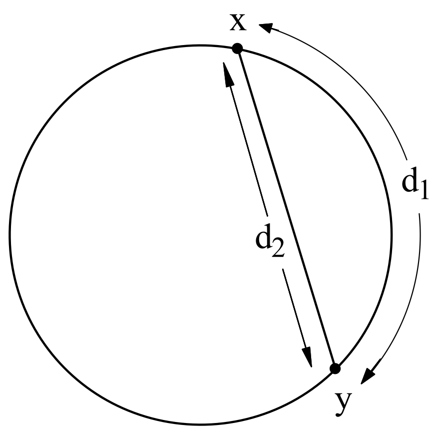


Vê-se que para r *fíxo e* s *suficientemente pequeno* $B_s^2(x) \subset B_r^l(x)$ *e que para* s *fíxo e* r *suficientemente pequeno* $B_r^l(x) \subset B_s^2(x)$ *e daí as topologias são as mesmas.*

(b) *Em* $\mathbb{R}$ *considere as duas métricas* $d_1(x, y) = |x - y|$, $d_2(x, y) = \min[|x - y|, 1]$. *Essas dão as mesmas topologlas pois as bolas com raio menor ou igual a*1 *sao as mesmas e em qualquer espaço métrico dado um* $r > 0$ *as bolas centradas em* x *com raio menor ou igual a* r *é uma base para as vizinhanças de* x. *Damos os gráficos das funções* $x \mapsto d_i(x_0.x)$ *:*



(c) *Num círculo definimos metricas* $d_1(x,y) =$ *comprimento do arco, e* $d_2(x,y) =$ *comprimento do secante.*



Essas dão as mesmas topologias pois

$$\frac{2}{\pi}d_1 \leq d_2 \leq d_1 \quad \textit{e daí} \quad B_r^1(x) \subset B_r^2(x) \subset B_{\frac{\pi}{2}r}^1(x).$$

Esses três exemplos mostram que um fato métrico nao é a mesma coisa que um fato topológico. Um espaço métrico tem mais estrutura do que o espaço topológico correspondente; nos exemplos (a) e (b) acima a métrica d_2 é sempre limitada, isto é existe um número M tal que $d_2(x,y) \leq M$ mas para d_1 isso nao é verdade.

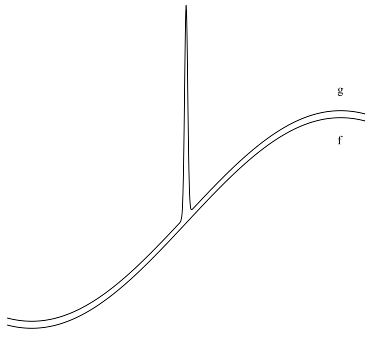
As distâncias serem limitadas é um fato métrico que não pode ser determinado pela topologia em geral. Damos agora um exemplo de duas métricas que dão topologias diferentes.

Exemplo 5.6 *Considere o espacco* $C([0,1],\mathbb{R})$ *com as seguintes duas métricas*

$$d_1(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

$$d_2(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx.$$

Agora $d_2(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx \leq \int_0^1 \sup_{y\in[0,1]} |f(y) - g(y)|\,dx = d_1(x,y)$ *logo* $d_2 \leq d_1$. *Disto segue que* $\mathcal{T}_2 \leq \mathcal{T}_1$. *Essas topologias porém são* *distintas pois como o grãfico em baixo mostra é possível ter $d_2(f,g) < \epsilon$ com $d_1(f,g)$ um número qualquer e daí a inclusão $B_s^2(f) \subset B_r^1(f)$ é impossível.*



Dado f, ϵ um g pode ser escolhido de forma tal que $d_2(f,g) < \epsilon$ e $d_1(f,g)$ é um número qualquer.

Em espaços métricos e mais geralmente em espaços satisfazendo o primeiro axioma de enumerabilidade temos ainda o seguinte critério de comparação de topologias.

Teorema 5.3 *Sejam $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ duas topologias satisfazendo o primeiro axioma de enumerabilidade. Tem-se:*

$$\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2 \Leftrightarrow (x_k \to x \text{ em } \mathcal{T}_2 \Rightarrow x_k \to x \text{ em } \mathcal{T}_1)$$

Em outras palavras se e somente se toda sequência convergente em relação a $\mathcal{T}_2$ converge ao mesmo ponto em relação a $\mathcal{T}_1$

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$ e $x_k \to_{\mathcal{T}_2} x$. Escolhe uma vizinhança V de x na topologia $\mathcal{T}_1$, mas então V é também uma vizinhança de x na topologia $\mathcal{T}_2$. Logo eventualmente $x_k \in V$ e daí$x_k \to_{\mathcal{T}_1} x$.

($\Leftarrow$) Suponha $x_k \to_{\mathcal{T}_2} x \Rightarrow x_k \to_{\mathcal{T}_1} x$. Seja C um fechado em relaç ao a $\mathcal{T}_1$ e $\bar{C}^{\mathcal{T}_2}$ seu fecho em relação a $\mathcal{T}_2$ Agora pelo Teorema (4.11) $x \in \bar{C}^{\mathcal{T}_2} \Rightarrow$ existe uma sequência $x_k \in C$ tal que $x_k \to_{\mathcal{T}_2} x$ mas então $x_k \to_{\mathcal{T}_1} x$ logo $x \in C$ pois C é fechado em $\mathcal{T}_1$. Então $\bar{C}^{\mathcal{T}_2} \subset C \Rightarrow \bar{C}^{\mathcal{T}_2} = C$. Assim todo fechado em $\mathcal{T}_1$ é fechado em $\mathcal{T}_2$ e disto segue que $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$. $\diamondsuit$

Aplicando este critério vemos mais facilment a equivalência das métricas nos Exemplos 5.5 (a) e (b) pois num espaço métrico $x_k \to x \Leftrightarrow d(x_k, x) \to 0$.

Veremos a generalização deste critério mais adiante.

Voltemos de novo ao conjunto de todas as topologias num certo conjunto X.

Notemos o seguinte fato fundamental:

Teorema 5.4 *A interseção de qualquer família de topologias é uma topologia.*

Demonstração: Seja $\mathcal{T}_\alpha$ uma família de topologias e considere $\mathcal{T} = \bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha$. Têm-se

(a) $\emptyset$, $X \in \mathcal{T}$ pois $\forall\, \alpha \emptyset$, $X \in \mathcal{T}_\alpha$.

(b) V, $W \in \mathcal{T} \Rightarrow V \cap W \in \mathcal{T}$ pois $\forall\, \alpha\, V, W \in \mathcal{T}_\alpha$ e daí $\forall\, \alpha, V \cap W \in \mathcal{T}_\alpha$.

(c) $U_\beta \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup U_\beta \in \mathcal{T}$ pois $\forall\, \alpha, U_\beta \in \mathcal{T}_\alpha$ e daí $\forall\, \alpha, \bigcup U_\beta \in \mathcal{T}_\alpha$.

Logo $\mathcal{T}$ é uma topologia. $\diamondsuit$

Disto segue que toda família $\mathcal{F}$ de topologias tem um ínfimo $\inf \mathcal{F} = \bigcap_{\mathcal{T} \in \mathcal{F}} \mathcal{T}$.

A reunião de topologias pode não ser uma topologia. Por exemplo tomemos $\mathbb{R}$ com as seguintes topologias $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\} \cup \{(r, \infty) \,|\, r \in \mathbb{R}\}$. $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X\} \cup \{(-\infty, s) \,|\, s \in \mathbb{R}\}$, os abertos além de $\emptyset$ e X sao então intervalos não limitados abertos:

Agora $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ nao é uma topologia pois se fosse teria que conter para $s > r$ o intervalo aberto $(s, r) = (-\infty, s) \cap (r, \infty)$ mas não o contém.

Este fato não impede que uma família de topologias tenha um supremo, só que esse supremo pode não coincidir com a reunião.

De fato toda família tem supremo. Seja $\mathcal{F}$ uma família de topologias, essa família é cotada superiormente pela topologia discreta que é a máxima topologia. Faz sentido falar então da interseção de todas as cotas superiores de $\mathcal{F}$. Isto é uma topologia e evidentemente também uma cota superior (seja $\mathcal{K}$ o conjunto de cotas superiores de $\mathcal{F}$, então $\mathcal{T} \in \mathcal{F}, \kappa \in \mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{T} \subset \kappa$ logo $\mathcal{T} \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{T} \in \cap_{\kappa \in \mathcal{K}} \kappa$. Logo ela é a mínima cota superior, isto é o supremo de $\mathcal{F}$. Mas toda topologia que contém todos os membros de $\mathcal{F}$ contem a reunião destes membros logo $\cup_{\mathcal{T} \in \mathcal{F}} \mathcal{T} \subset \sup \mathcal{F}$. Mas além dos elementos de $\cup_{\mathcal{T} \in \mathcal{F}} \mathcal{T}$ qualquer cota superior de $\mathcal{F}$ tem que conter as reuniões arbitrárias das interseções finitas daqueles mesmos elementos. Assim a reunião de $\mathcal{F}$ é uma sub-base para o $\sup \mathcal{F}$, o supremo de $\mathcal{F}$ então é a topologia gerada pela reunião de $\mathcal{F}$ como sub-base.

No exemplo acima vemos agora que $\sup(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) =$ a topologia usual em $\mathbb{R}$, pois as interseções finitas dos elementos de $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ são intervalos abertos e estes formam uma base para a topologia usual.

Seja agora P uma propriedade e seja $\mathcal{F}$ a família de todas as topologias que satisfazem P. Suponha que $\mathcal{F}$ não é vazio. Podemos afirmar o seguinte:

(a) Se $\inf \mathcal{F}$ também satisfaz P então ela é a mínima topologia que satisfaz P.

(b) Se $\sup \mathcal{F}$ também satisfaz P então ela é a máxima topologia que satisfaz P.

Note bem que as afirmações são condicionais, dependendo da propriedade P, $\inf \mathcal{F}$ pode ou não satisfazer P. Caso não o satisfazer a mínima topologia que satislaz P não existe.

Note também que já usamos (a) acima para mostrar a existência de supremos de famílias de topologias.

Consider agora um $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ e a seguinte propriedade de topologias $\mathcal{T}$: $\mathcal{T} \supset \mathcal{S}$. A interseção de todas as topologias que contém $\mathcal{S}$ (e tais existem pois $\mathcal{T}_{\text{discreta}} \supset \mathcal{S}$) também contém $\mathcal{S}$ e logo ela é a mínima topologia que contém $\mathcal{S}$. Notaremos essa topologia por $\mathcal{T}[\mathcal{S}]$ e vemos que além dos conjuntos $\emptyset$, X ela contém todas as reuniões arbitrárias das interseções finitas dos membros do $\mathcal{S}$. Como essa coleção de conjuntos já é uma topologia ela é, $\mathcal{T}[\mathcal{S}]$ o que quer dizer que $\mathcal{S}$ é uma sub-base para $\mathcal{T}[\mathcal{S}]$. Chamamos $\mathcal{T}[\mathcal{S}]$ da topolologia gerada por $\mathcal{S}$.

Nesta linguagem vemos que se $\mathcal{F}$ é uma família de topologias então $\sup \mathcal{F} = \mathcal{T}[\cup_{\mathcal{K} \in \mathcal{F}}]$; o supremo é a topologia gerada pela reunião.

Damos outro exemplo dessa construção: Seja $f : X \to Y$ e Y um espaço topológico com topologia $\mathcal{T}_Y$. Por enquanto X é só um conjunto sem outra estrutura. Consideremos agore todas as topologias em X para as quais f é contínua. Tais existem pois f é contínua com a topologia discreta em X. A topologia disereta é então a máxima topologia com f contínua. Se f for uma função constante a mínima topologia com f contínua seria a topologia indiscreta. Num certo sentido então a mínima topologia com f contínua refleteria as variações de f. Essa topologia existe pois qualquer topologia com f contínua tem que conter as imagens inversas $f^{-1}(U)$ de abertos $U \in \mathcal{T}_Y$. Mas essa coleção de conjuntos já é uma topologia $\emptyset = f^{-1}(\emptyset), X = f^{-1}(Y); f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V); \cup f^{-1}(U_\alpha) = f^{-1}(\cup U_\alpha)$ e logo ela é a mais fraca topologia fazendo f contínua.

Definição 5.5 *A topologia descrita acima chama-se* topologia inicial *respeito a f. Notaremos esta topologia por $f^{-1}(\mathcal{T}_Y)$.*

Teorema 5.5 *A topologia inicial satsifaz as seguintes propriedades:*

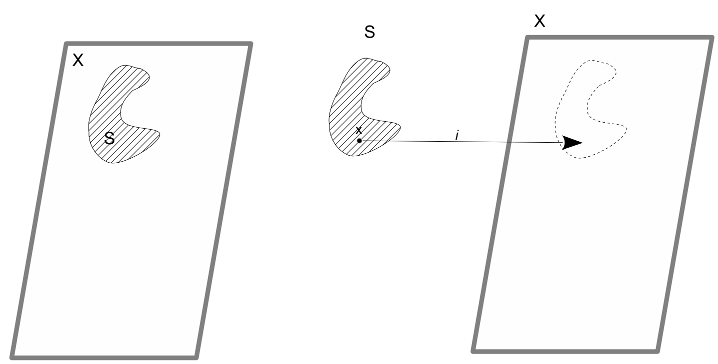
(a) *Os fechados da topologia inicial em X são imagens inversas dos fechados em Y.*

(b) *Se $\mathcal{B}$é uma base de $\mathcal{T}_Y$ então as imagens inverss $f^{-1}(B)$ dos elementos $B \in \mathcal{B}$ formam uma base da topologia inicial em X.*

(c) *Se $\mathcal{B}_{f(x)}$ é uma base de vizinhanças de $f(x) \in Y$ então as imagens inversas $f^{-1}(V)$ dos elementos $V \in \mathcal{B}_{f(x)}$ formam uma base de vizinhanças de $x \in X$ da topologia inicial.*

Exercício 5.1 - Demonstre o Teorema 5.5.

Considere agora a seguinte situação: sejam X um conjunto e $S \subset X$. Pense agora em S como conjunto próprio sem pensar nele como subconjunto de X; isso é esqueça os demais pontos. Introduza a aplicação da inclusão $i : S \to X$ (escreva-se também $i : S \hookrightarrow X$ por $i(x) = x$, $x \in S$. Isso é: coloca todo ponto de S no seu lugar em X.



Este aparente pedantismo é necessário para não criar confusões depois.

Definição 5.6 *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $S \subset X$. A topologia inicial respeito a inclusão $i : S \to X$ chama-se* topologia induzida em S. *Notaremos esta topologia por $\mathcal{T}|S$ ou $i^{-1}(\mathcal{T})$*

Como para qualquer $A \subset X$, $i^{-1}(A) = A \cap S$, concluimos do Teorema 5.5:

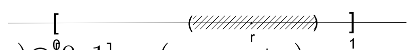
Corolário 5.2

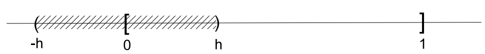
(a) *Os abertos de $\mathcal{T}|S$ são da forma $S \cap U$ onde U é um aberto em X.*

(b) *Os fechados de $\mathcal{T}|S$ são da forma $S \cap C$ onde C é um fechado de X.*

(c) *Se $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathcal{T}$ então os conjuntos $B \cap S$, $B \in \mathcal{B}$ formam uma base de $\mathcal{T}|S$.*

(d) *Se $x \in S$ e $\mathcal{B}_x$ e uma base de vizinhanças de x em X, isso é na topologia $\mathcal{T}$; então os conjuntos $V \cap S$, $V \in \mathcal{B}_x$ formam uma base de vizinhanças de x em S; isso é na topologia $\mathcal{T}|S$.*

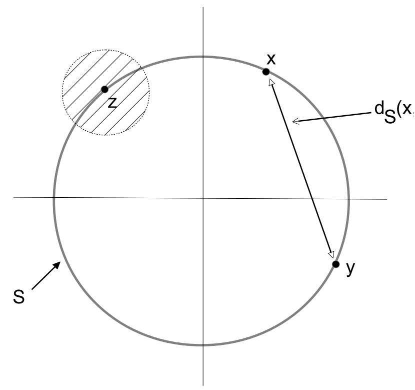
Exemplo 5.7 *Seja $[0,1]$ o intervalo fechado considerado agora como $[0,1] \subset \mathbb{R}$ na topologia induzida. Usando resultado (d) do Corolário 5.1 vemos que uma base de vizinhanças de um ponto $r \in (0,1)$ é feita de intervalos abertos centrados em r:* 

pois para ϵ suficientemente pequeno $(r-\epsilon, r+\epsilon) \cap [0,1] = (r-\epsilon, r+\epsilon)$ mesmo. Uma base de de vizinhanças de 0 é feita de intervalos de tipo $[0,h)\, h \in (0,1)$ pois $[0,h) = (-h,h) \cap [0,1]$: 

e da mesma maneira uma base de vizinhanças de 1 é feita de intervalos de tipo $(h,1]$, $h \in (0,1)$. Observe que damos somente uma base de vizinhanças, não todas as vizinhanças, pois por exemplo $(1/2,1]$ é uma vizinhança de $3/4$ e $[0,1/3]$ é uma vizinhança de 0 mas nao aparecem nas descrições acima.

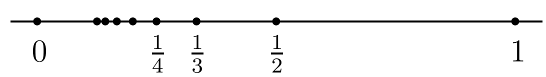
Observemos que a topologias induzidas em $[0,1]$ pela topolgia usual em $\mathbb{R}$ coincide com a topologia métrica em $[0,1]$ onde $d(x,y) = |x-y|$, mas $x, y \mapsto |x-y|$ e também a métrica em $\mathbb{R}$. Esse fato é um princípio geral:

Exemplo 5.8 *Seja (X, d_X) um espaço métrico e $S \subset X$. Podemos introduzir em S a assim chamada* métrica induzida *d_S pondo $d_S(x,y) = d_X(x,y)$; $x, y \in S$. Isso é, a distância entre dois pontos de S é a mesma distância que eles têm considerados como pontos de X. O princípio geral agora é: a topologia métrica $\mathcal{T}_S$ em S respeito a métrica induzida é igual à topologia induzida $\mathcal{T}_X|S$ em S pela topologia métrica $\mathcal{T}_X$ em X: $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}_X|S$. Esse fato segue do resultado (d) do Corolário 5.2: Seja $x \in S$ e $B_r^S(x)$ a bola aberta de raio r centrado em x respeito a métrica d_S e $B_r^X(x)$ a bola semelhante mas respeito a métrica d_X com x considerado como ponto de X. Evidentemente $B_r^S(x) = B_r^X(x) \cap S$ e daí o resultado. Considere agora o círculo unitário S como subconjunto de $\mathbb{R}^2$.*

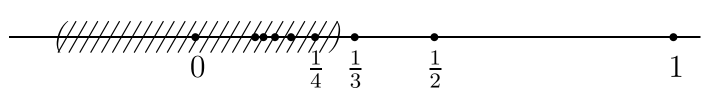


A métrica induzida em S é o comprimento do secante (veja Exemplo 5.5)(c). Uma base de vizinhanças de um ponto z é feita de interseções de discos abertos centrado em z com S; são intervalos abertos simétricos respeito a z no perímetro do círculo e coincidem com as bolas abertas da métrica d_S.

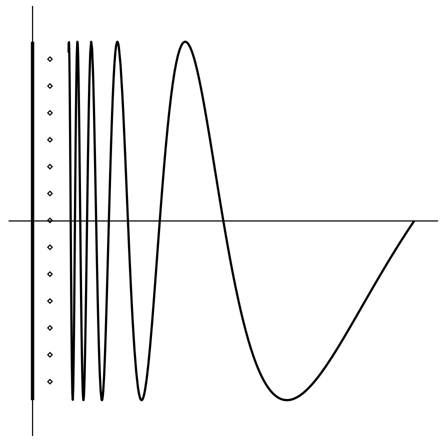
Exemplo 5.9 *Considere o conjunto $S = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n = 1, 2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$*



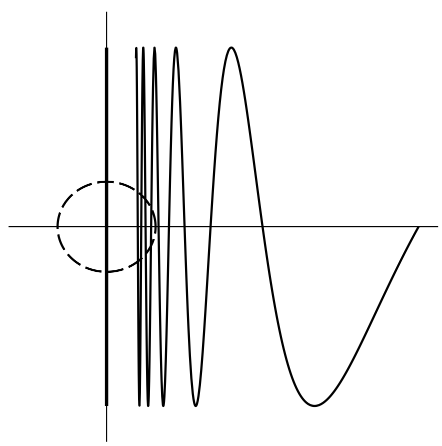
Na topologia induzida todo ponto de tipo $\frac{1}{m}$ é por si mesmo uma base de vizinhanas: $\{\frac{1}{m}\} = \{\frac{1}{m}\} \cap (\frac{1}{m} - \epsilon, \frac{1}{m} + \epsilon)$ para ϵ suficientemente pequeno. Esses pontos são abertos e fechados ao mesmo tempo. ($\{\frac{1}{m}\}$ é fechado na topologia induzida pois $\{\frac{1}{m}\}$ já é fechado em $\mathbb{R}$ e $\{\frac{1}{m}\} = S \cap \{\frac{1}{m}\}$); aplique resultado (b) do Corolário 5.2. Considere agora intervalos de tipo $(-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$ isso é uma base de vizinhanças de 0 em $\mathbb{R}$ então o sistema de conjuntos $(-\epsilon, \epsilon) \cap S$ é uma base de vizinhanças de 0 em S mas como a sequência $\frac{1}{m} \to 0$ conjunto $(-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$ contém todos as $\frac{1}{m}$ a partir de um certo inteiro M. Uma base de vizinhanças de 0 consiste então de conjuntos de tipo $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{m} \,|\, m \geq M\right\}$:



Exemplo 5.10 *Considere o conjunto $S = \{0\} \cup \{(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x}) \,|\, 0 < x \leq \frac{1}{\pi}\}$ isso é o grafico da função $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ em $(0, \frac{1}{\pi}]$ e o intervalo fechado vertical $\{0\} \times [-1, 1]$ centrado em 0:*



um ponto p no gráfico do $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ $x \in (0, \frac{1}{\pi}]$ *tem como esperamos uma base de vizinhanças consistente de intervalqp abertos no arco do gráfico. Um erro cumum é pensar que uma vizinhança de* $(0,0)$ *consistiria de um intervalo de tipo* $\{0\} \times (-\epsilon, \epsilon)$ *mas vemos que qualquer disco aberto centrado em* $(0,0)$ *contém também um número infinito de pedaços do gráfico de* $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$.



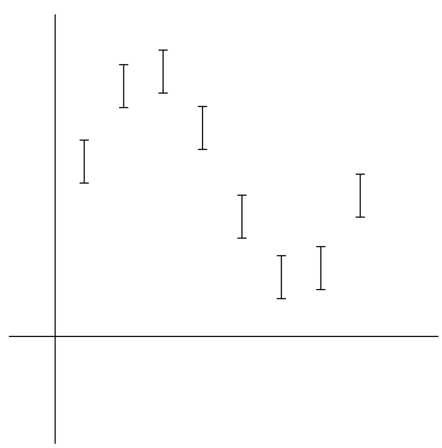
Toda vizinhança de um ponto em $\{0\} \times [-1,1]$ *contém uma infinidade de arcos do gráfico de* $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$

Exemplo 5.11 *Considere o conjunto* $\mathbb{Q}$ *de números racionais como subconjunto de* $\mathbb{R}$. *Uma base para a topologia induzida em* $\mathbb{Q}$ *consiste de interseções* $(a,b) \cap \mathbb{Q}$ *de intervalos abertos de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{Q}$. *Aqui surge o seguinte fato: algumas dessas interseções são também fechadas em* $\mathbb{Q}$ *por exemplo*

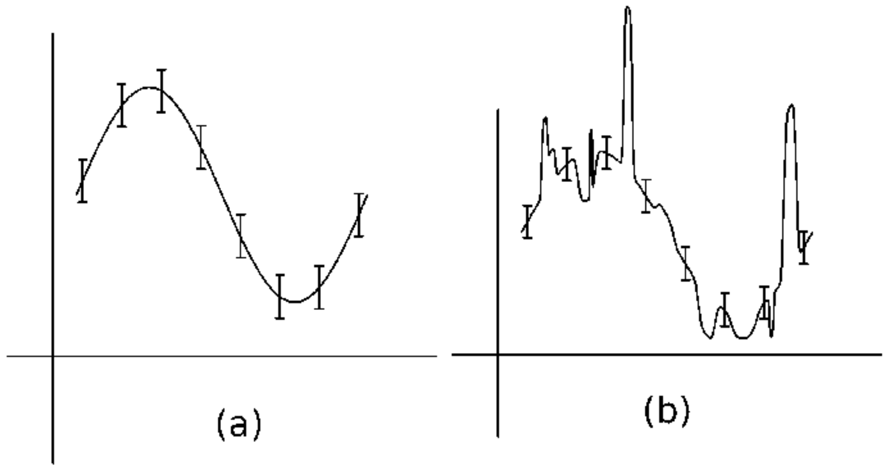
$(\sqrt{2},\pi)\cap\mathbb{Q}=[\sqrt{2},\pi]\cap\mathbb{Q}$ e como $[\sqrt{2},\pi]$ é fechado em $\mathbb{R}$, $[\sqrt{2},\pi]\cap\mathbb{Q}$ é fechado em $\mathbb{Q}$. Na topologia induzida então, $\mathbb{Q}$ tem muitos conjuntos ao mesmo tempo fechados e abertos.

Podemos agora entender melhor o comportamento da integral em $C([0,1],\mathbb{R})$. O paradoxo é que na topologia fraca a integral não é contínua mas é esta a topologia que reflete o nosso controle prático de funções. A integral é contínua na topologia uniforme dado pela métrica $d(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$ mas esss topologia exige informações sobre todos os valores da função, o que é praticamente impossível. Reconhecemos primeiro o fato que em qualquer aplicação da matemática, em qualquer modelo matemático, os objetos matemáticos além de serem formas abstratas, carregam significações, isso é devem ser interpretáveis, fazer sentido. Assim os possíveis objetos são restritos. Nas aplicações de um campo de matemática a outro campo de matemática essas interpretaçoes sao completamente formalizadas e podemos até não reconhecer que estamos trabalhando com um modelo; mas em aplicações mais práticas muita vezes nao é tão claro quais são os objetos que fazem sentido e quais não.

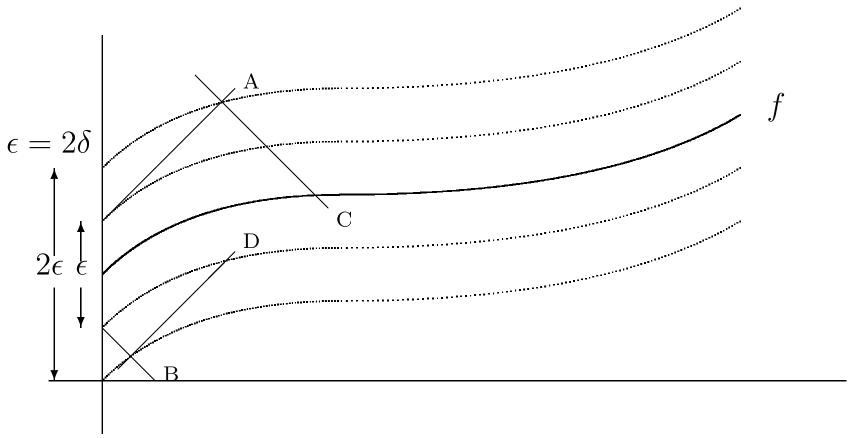
Por exemplo dados os seguíltes dados experimentais com os correspondentes graus de precisão nós determinamos só uma vizinhança fraca de funções



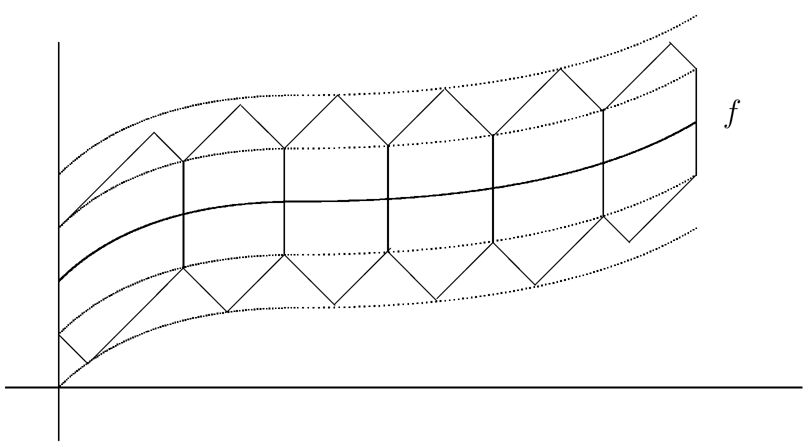
mas dos dois membros seguintes dessa vizinhança só o primeiro teria sentido



se nós estamos estudando, por axamplo, a temperatura média mensal no Rio de um período de 18 meses. Extrapolações de dados como em (b) acima não tem sentido a menos que haja outras indicações. Em todo modelo então aceitamos somente as construções que tem sentido embora que o conjunto dessas possa não ser explicitamente definida. Considere agora uma situação onde uma função é aceitável se e somente se ela é continuamente diferenciável em $[0,1]$ e a derivada é limitado por 1; seja então $S = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \,|\, f'\text{existe e é contínua em } [0,1] \text{ e } |f'(x)| < 1\}$ Não perguntamos muito sobre a razão dessa limitação, por exemplo f pode ser potência elétrica, então f' é a força que uma carga elétrica sente no campo de potência f; essa força pode ser limitada pela disposição física dos aparelhos nesta experiência. Mostramos agora que topologias induzidas em S pela topologia uniforme $\mathcal{T}_d$ e a topologia fraca $\mathcal{T}_{\text{fraca}}$ são as mesmas: $\mathcal{T}_d|S = \mathcal{T}_{\text{fraca}}|S$. Como já sabemos que $\mathcal{T}_{\text{fraca}} \leq \mathcal{T}_d$ basta só mostrar $\mathcal{T}_d \leq \mathcal{T}_{\text{fraca}}$. Seja $f \in S$ e considere então a bola $B^S_\epsilon(f)$ centrado em f da métrica induzida d_S; precisamos então achar uma vizinhança fraca $V_f(\delta, F)$ tal que $V_f(\delta, F) \cap S \subset B^S_\epsilon(f)$. Considere o seguinte diagrama:



A vizinhança métrica $B^S_\epsilon(f)$ consiste de todas as funções em S que ficam na faixa maior em torno de f. São funções que passam através de janelas de altura 2ϵ centradas em todos os pontos do gráfico de f. Escolhe agora $\delta = 1/2\epsilon$ e considere uma janela de altura $2\delta = \epsilon$ centrado em $(0, f(0))$. Se $g \in S$ tem $g(0)$ nessa janela ela não pode subir além da reta A nem baixar além da reta B ,pois $|g'(x)| < 1$ mas como queremos que g nunca saia de $B^S_\epsilon(f)$ ele tem que voltar para a faixa menor antes da reta C e antes da reta D. Assim se nós colocamos uma segunda janela como no diagrama e exigimos que g passe também através dela a função não pode sair da faixa maior nesse intervalo. Começando agora com a segunda janela construimos um número finito de janelas centradas em $(x, f(x))$, $x \in F$ (conjunto finito) de altura 2δ tais que um $g \in S$ passando através de todas elas não pode sair da faixa maior; $V_f(\delta, F) \subset B^S_\epsilon(f)$.



Um $g \in V_f(\delta, F)$ não pode sair da faixa poligonal pois $|g'(x)| < 1$.

Exercício 5.1 *Dê a razão da nossa indução acima nos levar somente a um número finito de janelas.*

Vemos agora que duas topologias muito diferentes podem dar a mesma topologia induzida num subconjunto.

Isso acontece muito em análise e explica em parte a aplicabilidade de construções não bem comportadas respeito a certas topologias. Algumas das mudanças no formalismo matemático de outras ciências podem ser entendidas como uma escolha diferente do subconjunto prático, isso é dos objetos significativos.

Definição 5.7 *Sejam $S \subset X$ e $i : S \to X$ a inclusão. Se $f : X \to Y$ é uma aplicação, a aplicação $f \circ i : S \to Y$ chama-se f* restrito a S *e denota-se por $f|S$.*

Tem-se $(f|S)(x) = f(x)$, $x \in S$. É a mesma aplicação mas considerada agora como sendo definido somente em S. Por exemplo se $id_X : X \to X$ é a aplicação idêntica de X em X: então $id_X|S = i$ a inclusão. É usual fazer um diagrama assim:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f|S"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Este diagrama comuta no sentido que $f|S = f \circ i$

Se agora $g : S \to Y$ é uma aplicação dada então qualquer função $\hat{g} : X \to Y$ tal que $\hat{g}|S = g$ chama-se de uma extensão de g a X.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "g"'] & X \arrow[d, "\hat{g}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

O que nos interessa, geralmente são extensões de certos tipos.

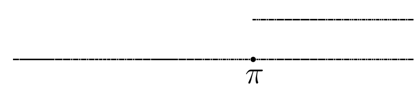
Suponha agora que X é um espaço topológico com topologia $\mathcal{T}$. Se $f : X \to Y$ para um outro espaço topológico é contínuo então para qualquer $S \subset X$, $f|S$ é contínuo na topologia induzida em S. Isso é claro pois $f|S = f \circ i$ é composição de funções contínuas. As vezes é importante saber se dado uma função contínua $g : S \to Y$ é possível achar uma extensão contínua $\hat{g} : X \to Y$:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "g"'] & X \arrow[d, "\hat{g}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Isso não é sempre pcssível.

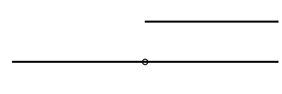
Exemplo 5.12 *Considere $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e a :função*

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x < \pi \\ +1, & x > \pi \end{cases}$$



em $\mathbb{Q}$ essa função é contínua pois os conjuntos $(\pi, \infty) \cap \mathbb{Q}$, $(-\infty, \pi) \cap \mathbb{Q}$ sao fechados e abertos e além de $\emptyset$ e $\mathbb{Q}$ mesmo sao as únicas imagens inversas de g. Esta função não tem extensão contínua a $\mathbb{R}$. Uma função contínua em $\mathbb{Q}$ então pode "pular" em qualquer número irracional. O mesmo fenômeno numa situação mais simples acontece com $S = [-1, 0) \cup (0, 1] \subset [-1, 1]$ e

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ +1, & x > 0 \end{cases}$$

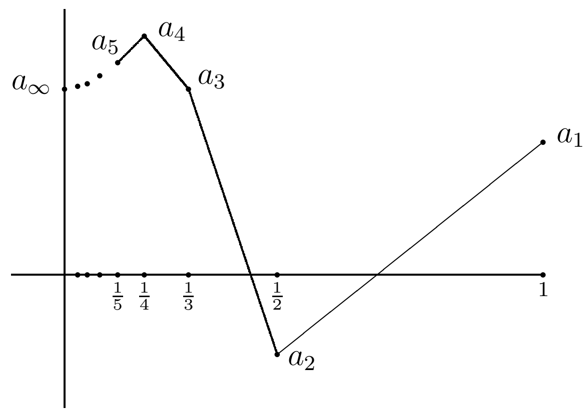


g é contínua

em S na topologia induzida mas não tem extensões contínuas.

Considere agora o subconjunto $S = \{0\} \cap \{\frac{1}{n} \,|\, n = 1, 2, \dots\} \subset \mathbb{R}$. Seja $g : S \to \mathbb{R}$ uma função e define os números $a_\infty = g(0)$, $a_n = g(\frac{1}{n})$. Agora a continuidade de g é equivalente a $\lim a_n = a_\infty$ Para ver isso note primeiro que todo ponto $\{\frac{1}{m}\}$ é fechado e aberto em S então o valor de g pode ser escolhido arbitrariamente em $\{\frac{1}{m}\}$ sem tocar na continuidade dela neste ponto.

Como a topologia em S pode ser também dada pela métrica induzida a continuidade de g em 0 é equivalente a $s_k \to 0$, $s_k \in S \Rightarrow g(s_k) \to g(0)$. Mas $s_k \to 0 \Leftrightarrow d_S(s_k, 0) \to 0 \Leftrightarrow d_X(s_k, 0) \to 0$, isso é, a convergência pode ser testada em X. Como $\frac{1}{n} \to 0$, precisamos $g(\frac{1}{n}) = a_n \to a_\infty = g(0)$, e isso é suficiente. O conjunto $C(S, R)$ de funções contínuas $S \to \mathbb{R}$ então está numa correspondencia biunúvoca com o conjunto de sequências convergentes reais. Disto já podemos tirar certos resultados. Primeiro notemos que toda tal g contínua tem extensão contínua a $[0, 1]$ (e em $\mathbb{R}$ todo):



Ligue os pontos do gráfico de g com segmentos retos dando uma g contínua $[0, 1] \to \mathbb{R}$. Lembremos agora que pelo Teorema de Stone-Weierstrass dado um $\epsilon > 0$ uma $\hat{g} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua podemos achar um polinômio p tal que $|(p(x) - g(x)| < \epsilon$, $x \in [0, 1]$; isto é, toda função contínua em $[0, 1]$ pode ser aproximada uniformemente por polinômios. Agora $p(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$, Considere as seguintes sequências convergentes:

$$
\begin{aligned}
a^{(0)} &= (1, 1, 1, 1, \ldots) \\
a^{(1)} &= \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right) \\
a^{(2)} &= \left(1, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{3}\right)^2, \left(\frac{1}{4}\right)^2, \ldots\right) \\
&\vdots \\
a^{(k)} &= \left(1, \frac{1}{2^k}, \frac{1}{3^k}, \frac{1}{4^k}, \ldots\right)
\end{aligned}
$$

note que $a^{(k)}$ como função em S é $x^k|S$. Disso segue que $p(x)|S = \sum_{k=0}^{N} a^{(k)}$ ou em outras palavras em S, $|\sum_{k=0}^{N} a^{(k)} - g| < \epsilon$. Achamos então um teorema de aproximação para sequências convergetes. Isso foi possível pela identificação do conjunto de sequências convergentes com o espaço de funções contínuas num certo espaço topo16gico.

Capítulo 6

Comparação de espaços topológicos

Em vez de comparar topologias diferentes num dado conjunto podemos comparar espaços topológicos diferentes. Como primeiro passo nessa direção:

Definição 6.1

(a) *Seja* $f : X \to Y$ *uma aplicação entre dois espaços topológicos,* f *chama-se de* homeomorfismo *se ela é biunívoca, contínua e* f^{-l} *é contínua.*

(b) *Dois espaços* X, Y *sao ditos serem* homeomorfos *se existe um homeomorfisimo* $f : X \to Y$*. Dizemos também que* X *e* Y *são* topologicamente isomorfos*. Escrevemos* $X \simeq Y$*.*

Do ponto de vista topológico dois espaços homeomorfos sao os mesmos. Qualquer situação topológica num tem uma situação equivalente no outro. Não tem maneira estritamente topológica de distinguir um do outro. Os resultados da topologia são invariantes sob a substituição de espaços por outros homeomorfos a eles. Disto segue a importância de reconhecer quando dois são homeomorfos e quando não. Em outras palavras precisamos uma classificação de espaços topológicos a menos de um homeomorfismo. Nesta generalidade o problema é quase insolúvel; os espaços topológicos são extremamente variados. Para certos tipos de espaços esta classificação já é um campo grande de investigação. Uma boa parte da topologia algébrica é motivada por este problema.

Damos aqui alguns exemplos de espaços homeomorfos e não.

Exemplo 6.1

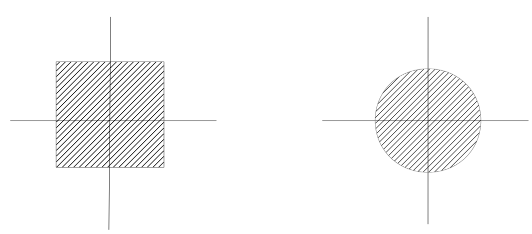
(a) $\mathbb{R} \simeq (-\pi/2, \pi/2)$ *onde* $(-\pi/2, \pi/2)$ *tem a sua topologia induzida de* $\mathbb{R}$. *Um homeomorfismo* $f : \mathbb{R} \tilde{\to} (-\pi/2, \pi/2)$ *é dado por* $x \mapsto \arctan(x)$. *Disto podemos construir o seguinte diagrama de homeomorfismos*

$$
\begin{tikzcd}
 & & & (a,\infty) \\
\mathbb{R} \arrow[r, "\overset{\arctan(x)}{\sim}"] & (-\pi/2,\pi/2) \arrow[r, "\overset{\frac{1}{2}(x+\pi/2)}{\sim}"] & (0,\pi/2) \arrow[r, "\overset{\tan x}{\sim}"] \arrow[d, "\wr\, a+\frac{2(b-a)}{\pi}x"] & (0,\infty) \arrow[u, "\wr\, x+a"'] \arrow[d, "\wr\, -x"] \\
 & & (a,b) & (-\infty,0) \arrow[d, "\wr\, x+b"] \\
 & & & (-\infty,b)
\end{tikzcd}
$$

Então os quatro conjuntos: $\mathbb{R}$, (a,∞), $(-\infty,b), e(a,b)$ *são homeomorfos e como espaços topológicos são equivalentes.*

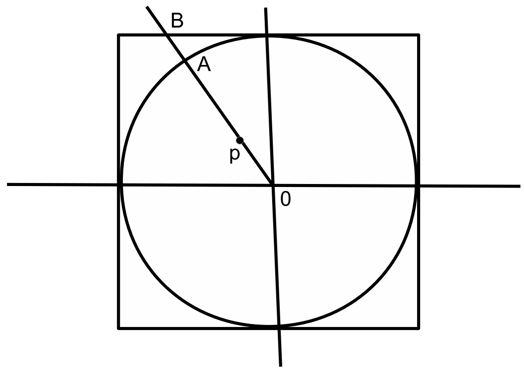
(b) *Considere o quadrado e o disco unit'rio em* $\mathbb{R}^2$

$$Q = \{(x,y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}, \quad D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

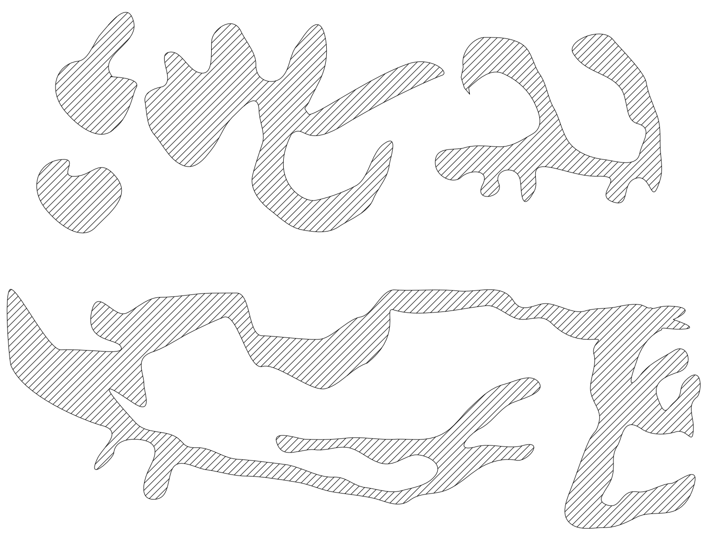


Q D

Para construir um homeomorfismo $h : D \xrightarrow{\sim} Q$ considere um $p \in D$, se $p = (0,0)$ seja $h(p) = (0,0)$, se $p \neq 0$ considere um raio passando por p; esse raio corta o perímetro do disco em A e



o perímetro do quadrado em B. A razão $\mathrm{BO}/\mathrm{AO} = u(p)$ *vária continuamente com p. Define agora $h(p) = u(p)p$, isto dá um homeomorfismo $D \xrightarrow{\sim} Q$. Da mesma maneira a bola fechada e o cubo fechado em qualquer espaço $\mathbb{R}^n$ são homeomorfos. Mais geralmente todos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ são homeomorfos*



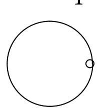
Um conjunto homeomorfo a uma bola fechada em $\mathbb{R}^n$ chama-se uma n-célula. Uma 0-célula é por definição um ponto só. O intervalo $[0,1]$ é *uma* 1*-célula e o disco fechado* $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ *uma* 2*-célula. Para* n *diferentes as várias* n*-células não são ho meomorfas, a demonstração porém não é muito fácil.*

(c) *Os espaços* $[0, 1)$, $(0, 1)$ *(com a topologia induzida da topologia em* $\mathbb{R}$ *não são homeomorfos. O espaço* $[0, 1)$ *tem a seguinte propriedade: existe um ponto tal que depois de tirá-lo ficamos com um espaço homeomorfo a R; de fato* $[0, 1) \setminus \{0\} = (0, 1) \simeq \mathbb{R}$*. Essa propriedade é invariante sobre homeomorismos mas* $(0, 1)$ *não tem essa propriedade pois para qualquer ponto* $r \in (0, 1)$, $(0, 1) \setminus \{r\} = (0, r) \cup (r, 1) \not\simeq \mathbb{R}$*. Para ver que* $(0, r) \cup (r, 1) \not\simeq \mathbb{R}$ *notemos que* $(0, r) \cup (r, 1)$ *pode ter uma função contínua real com dois valores só:* $g(x) = \begin{cases} -1 & x \in (0, r) \\ +1 & x \in (r, 0) \end{cases}$ *(veja Exemplo 5.1) mas* $\mathbb{R}$ *nao tem esta propriedade. Como esta propriedade também é invariante sob homemorfismos os dois espaços não podem ser homeomorfos.*

Definição 6.2 *Uma propriedade de um espaço que é invariante sob homeomorfismos chama-se* propriedade topológica*.*

O método geral de mostrar que dois espaços não são homeomorfos é achar uma propriedade topológica verdadeira para um mas nao para o outro.

Uma caracterização topológica de um espaço é um conjunto de propriedades topológicas tais que quaisquer dois espaços que satisfazem todas essas propriedades são homeomorfos. Em geral caracterizações são difíceis a encontrar e por enquanto não damos nenhuma. Notamos pelo menos que a propriedade: existe um ponto $x_0 \in X$ que chamaremos de tirável tal que $X \setminus \{x_0\} \simeq \mathbb{R}$, nao é uma caracterização de $[0, 1)$ pois o círculo também tem esta propriedade:

 $\simeq \mathbb{R}$ (considere $x \in \mathbb{R} \overset{h}{\mapsto} e^{i(\pi + 2\arctan(x))} \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$)

No círculo este ponto tirável nao é único, qualquer ponto serve, em $[0, 1)$ o ponto tirável é único. Porém exigindo a unicidade deste ponto ainda não dá uma caracterização. Considere $X = \mathbb{R} \cup \{\heartsuit\}$ onde $\heartsuit$ é um ponto $\notin \mathbb{R}$. Digamos que uma base de vizinhanças de $x \in \mathbb{R}$ é feita de conjuntos usuais: $\{(x - \epsilon, x + \epsilon) \mid \epsilon > 0\}$ mas uma base de $\heartsuit$ dado pelos conjuntos $\{\heartsuit\} \cup (-1 - \epsilon, -1) \cup (1, 1 + \epsilon)$, $\epsilon > 0$:

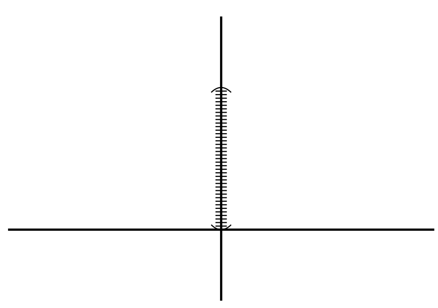
O ponto ♡ é o único tirável mas X nao é homeomorfo a $[0,1)$ pois em X qualquer vizinhança de ♡ e qualquer vizinhança de 1 tem interseção não vazia e isso não é válido para dois pontos diferentes em $[0,1)$. Um outro tipo de comparação de espaços topológicos é o seguinte:

Definição 6.3 *Uma aplicação $f : X \to Y$ entre dois espaços topológicos chama-se* mergulho *se f define um homeomorfismo entre X e a imagem $f(X) \subset Y$ onde esta imagem é considerada com a topologia induzida de Y.*

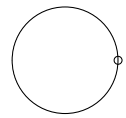
Em outras palavras f apresenta o espaço X como subespaço do espaço Y. Dado qualquer espaço topológico X e um subconjunto $S \subset X$, a inclusio $i : S \to X$ é um mergulho de S (com a topologia induzida) em X.

Exemplo 6.2

(a) *Considere a aplicação $X = (0,1) \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ dada por $f(r) = (0,r)$ (o* par $(0,r)$ *como ponto de $\mathbb{R}^2$) isso é um mergulho com $f(X)$ o seguinte subconjunto*



(b) *Considere a aplicação* $X = (0,1) \xrightarrow{f} \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ *isto é um mergulho cuja imagem é um círculo furado.*



As vantagens de mergulhos e que espaços topológicos complicados podem ser vistos como subespaços de espaços mais simples. O espaço ambiente Y pode também fornecer bastantes aplicações contínuas para o espaço X, isto é toda aplicaçio contínua $Y \to Z$ dá uma aplicação contínua $X \to Z$ por composção:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Para Z fixo e mergulhos bons isto pode dar todas as aplicações contínuas. Considere por exemplo o subespaço de $\mathbb{R}^2$ introduzido pelo Exemplo 5.10. Como veremos muito depois, toda função numérica contínua nesse espaço pode ser estendida a uma função contínua em $\mathbb{R}^2$ mas aí em qualquer região limitada toda função contínua pode ser aproximada uniformemente por polinômios, então restrições de polinômios em $\mathbb{R}^2$ a este subespaço podem aproximar uniformemente qualquer função contínua neste subespaço. Achar uma família de funções assim sem usar o espaço ambiente seria muito difícil.

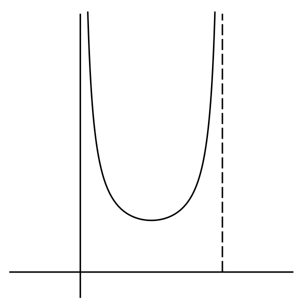
Considere os dois mergulhos (a) e (b) do Exemplo 6.2. Uma função contínua $(0,1) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ pode ser dada através mergulho (a) como

$$\begin{tikzcd} (0,1) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "k"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

(isto é, como restrição de uma função contínua $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ à imagem de $(0,1)$ pelo mergulho) se e somente se $\lim_{x\downarrow 0} k(x)$ e $\lim_{x\uparrow 0} k(x)$ existem, e da mesma maneira pode ser dada atraves mergulho (b) se e somente se os dois limites existem e coincidem.

A existência desses limites nos possibilita extender k ao fecho e daí recorremos a um teorema a ser demonstrado depois que ama função contínua num subespaço fechado de $\mathbb{R}^2$ pode ser extendida a $\mathbb{R}^2$.

Um mergulho de (0,1) em $\mathbb{R}^2$ que possibilita a extensão de uma função contínua qualquer é por exemplo $x \mapsto \left(x, \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$ isto é a imagem é o gráfico da função $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$.



Neste mergulho a imagem de $(0,1)$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^2$.

O mergulho usual $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ dos números racionais nos números reais facilita o nosso entendimento da topologia em $\mathbb{Q}$ (que pode ser definida intrinsicamente atraves a métrica $d(p,q) = |p-q|$ por exemplo) e embora não toda função contínua em $\mathbb{Q}$ seja restrição de uma função contínua em $\mathbb{R}$ o mergulho facilita entend-las. Veja Exemplo 5.10.

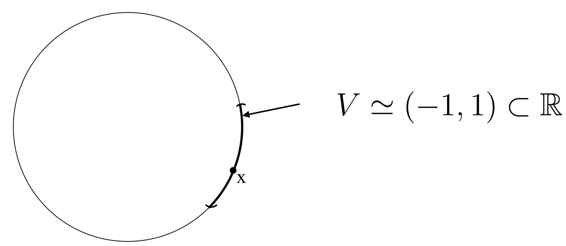
Um mergulho então é útil se o espaço ambiente Y facilita o entendimento da estrutura topológica de X. O problema de quais são os bons espaços ambientes e quais são os bons mergulhos será abordado em vários pontos neste livro.

O terceiro conceito de comparação de espaços topológicos é o de homeomorfismo local.

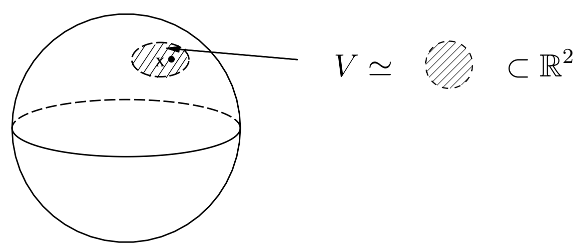
Definição 6.4 *Um espaço X é dito ser* localmente Y*, ou* localmente homeomorfo a Y*, se todo ponto $x \in X$ tem uma vizinhança V homeomorfo a um aberto de Y. Isto é para todo $x \in X$ existe uma vizinhança V e um mergulho $h : V \to Y$ com imagem aberta em Y. O mergulho h chama-se* homeomorfismo local.

Exemplo 6.3

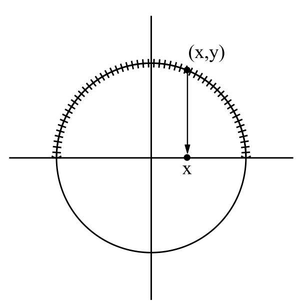
(a) *O círculo S^1 é localmente $\mathbb{R}^1$*



(b) *A esfera S^2 é localmente $\mathbb{R}^2$.*



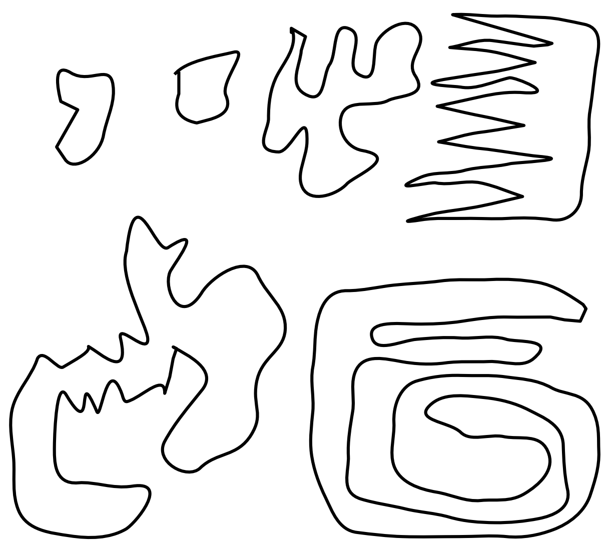
Os homeomorfismos locais podem ser dados explicitamente usando as coordenadas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente onde S^1 e S^2 são mergulhados na maneira mais usual: $\{x^2+y^2=1\} \subset R^2$ e S^2 como o conjunto $\{x^2+y^2+z^2=1\} \subset \mathbb{R}^3$. Por exemplo a transformação $(x,y) \mapsto x$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ restrita ao arco superior aberto do círculo dá um homeomorfismo daquele arco com $(-1,1)$.



Isto é um homeomorfismo local para todo ponto do arco superior aberto, para outros pontos usam-se projeções semelhantes.

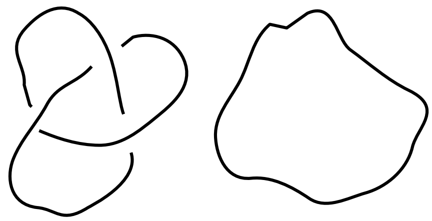
Esta construção mostra mais um uso de mergulhos, a saber, fornecimento de homeomorfismos locais.

Note bem que quando nós falamos do círculo S^1 geralmente nao estamos referindo ao círculo explicitamente apresentado como $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, mas a qualquer espaço topológico homeomorfo àquele círculo standard. Geralmente não distinguimos entres espços homeomorfos. Assim todos os seguintes subconjuntos de R^2 são S^1:



Do ponto de vista topológico são completamente iguais.

Nestas considerações é importante distinguir um fato intrínseco de um espaço topológico de um fato que refere a seu mergulho possível num outro espaço. Por exemplo considere os dois seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$. (Aqui nós em verdade damos as projeções deles neste papel que é um pedaço de R^2)



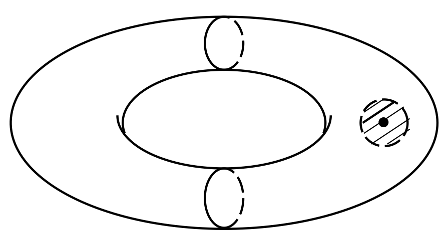
(a) **um nó** (b) **um laço**

Como subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ ambos são homeomorfos a S^1, sao mergulhos de S^1. O fato que não podemos soltar o nó (a) em $\mathbb{R}^3$ e transformá-lo no conjunto (b) com deformações contínuas é um fato do mergulho e nao refere a nenhuma propriedade intrínseca topológica que (a) tem e o (b) não tem. Como muitos espaços topológicos na prática são apresentados como subespaços de outros precisamos exercer cuidado em não confundir fatos intrínsecos com fatos de mergulho.

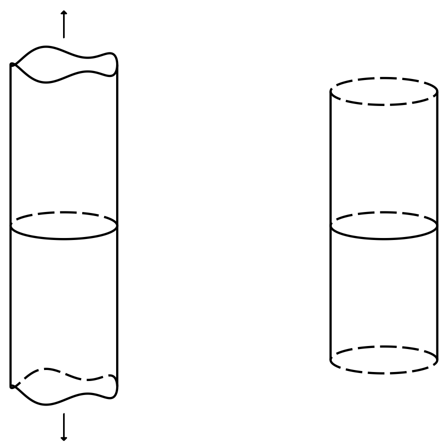
Continuamos com mais exemplos de homeomorfismos locais:

Exemplo 6.4

(a) *O toro T^2 é localmente $\mathbb{R}^2$.*

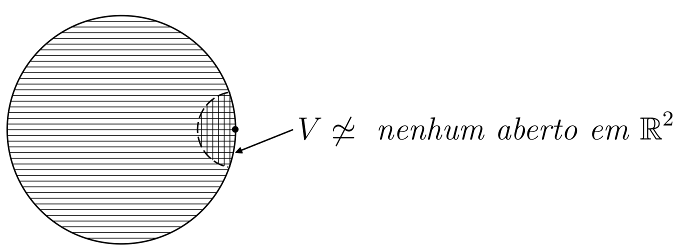


(b) *O cilindro infinito $\{(x, y, z) \mid x^2+y^2 = 1\}$, e o cilindro finito $\{(x, y, z) \mid x^2+y^2 = 1, |z| < 1\}$ são ambos localmente $\mathbb{R}^2$.*

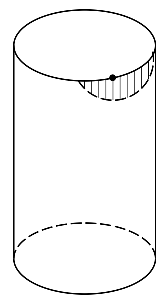


(c) *Para qualquer espaço topológico X qualquer aberto $U \subset X$ é localmente X. O homeomorfismo local para qualquer $x \in U$ é dado pela inclusão $i : U \to X$. Um subconjunto qualquer de X pode não ser localmente X; por exemplo a* 1*-célula* $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ *nao é localmente R pois qualquer vizinhança V de* 1 *contém como subconjunto aberto um intervalo do tipo $(r,1]$, se $h : V \to \mathbb{R}$ fosse um homeomorfismo local com $h(V)$ aberto em $\mathbb{R}$, a imagem $h((r,1]) = (h^{-1})^{-1}((r,1])$ seria um aberto em $h(V)$ pois h^{-l} é contínuo. Então $h((r,1]) = h(V) \cap U$ onde U é um aberto de $\mathbb{R}$ mas como $h(V)$ é aberto em R concluimos que $h((r,1])$ é aberto em $\mathbb{R}$. Como h é um homeomorfismo $V = h(V)$, $h|(r,1]$ é um homeomorfismo $(r,l] \simeq h((r,1])$. Então $(r,1]$ seria homeomorfo a um aberto em $\mathbb{R}$ e isto é impossível pois $(r,1] \setminus \{1\} \simeq \mathbb{R}$ e nenhum aberto de $\mathbb{R}$ sendo uma reunião disjunta de intervalos abertos contém um ponto cuja remoção deixa um conjunto homeomorfo a $\mathbb{R}$.*

Com um argumento semelhante podemos mostrar que nenhuma n-célula é localmente $\mathbb{R}^n$, por exemplo na 2*-célula os pontos na fronteira não tem vizinhanças requeridas*

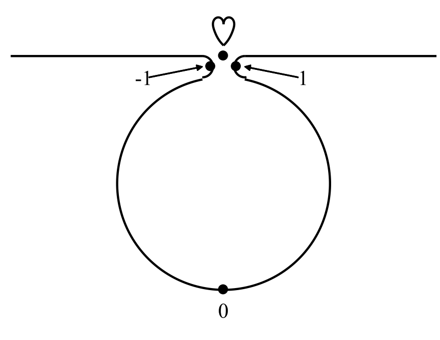


Similarmente o cilindro finito fechado $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$ *não é localmente* $\mathbb{R}^2$.



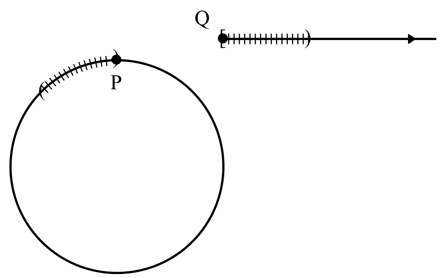
(d) *Dos espaços localmente* $\mathbb{R}$ *já conhecemos* $\mathbb{R}$, S^1, *e qualquer aberto de* $\mathbb{R}$. *Além desses há muitos. O espaço* $X = \mathbb{R} \cup \{\heartsuit\}$ *introduzido acima é um outro.*

Para entender melhor este espaço pense nele assim:



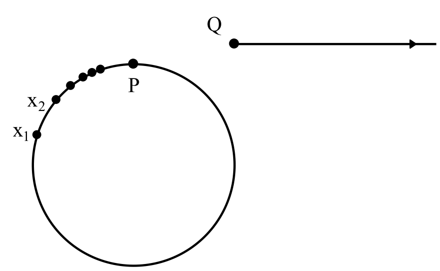
O ponto $\heartsuit$ *é um ponto de transição entre o lado esquerdo de* -1 *e o lado direito de* 1; *de fato* $X \setminus [-1, 1] \simeq \mathbb{R}$.

(e) *Eis um outro espaço* X *localmente* $\mathbb{R}$. *Considere* S^1 *e* $[0, \infty)$ *dispostos assim:*



Seja $P \in S^1$ e Q o ponto $0 \in [0, \infty)$ todos os pontos exceto Q tem base de vizinhanças usual, uma base de vizinhanças de Q é feita com conjuntos do tipo traçado no desenho.

Para entender melhor considere uma sequência de pontos em S^1 que convergem para P do lado esquerdo, essa sequência também converge

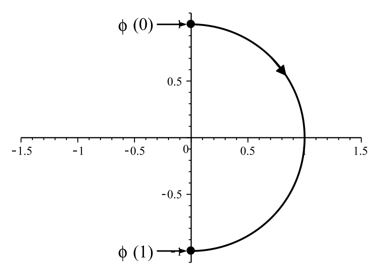


para o ponto diferente Q pois entra eventualmente em qualquer vizinhança dele. Uma sequência semelhante do lado direito de P converge somente a P pois nunca entra a vizinhança dada de Q.

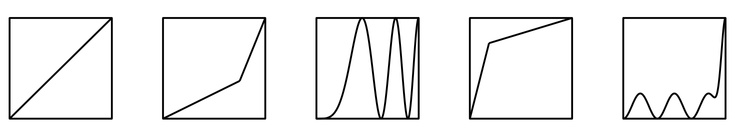
Para ainda melhor entendimento introduzimos um conceito que aliás será útil em outros contextos:

Definição 6.5 *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico, um* caminho *em X e uma aplicação continua ϕ de um intervalo I para X. Os intervalos mais usados sao $[0,1]$ e $[0,\infty)$. No caso $[0,1]$, $\phi(0)$ é o* início *do caminho e $\phi(1)$ é o* fim*, no caso $[0,\infty)$, $\phi(0)$ é o início mas o caminho não tem fim.*

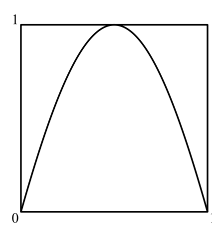
A palavra "caminho" não é muito boa aqui, "caminhada" seria melhor, pois é importante não confundir o caminho ϕ como definido aqui com a imagem $\phi(I)$ como subconjunto de X. A imagem $\phi(I)$ é o trajeto percorrido mais podemos percorrer este de maneiras diferentes: considere os dois caminhos $\phi_1, \phi_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dados por $\phi_1(t) = (sen\,\pi t, cos\,\pi t)$ e $\phi_2(t) = (sen\,\pi t^2, cos\,\pi t^2)$ o trajeto é o mesmo:



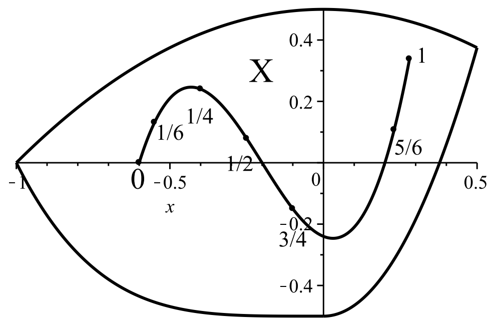
mas com ϕ_1 chegamos ao ponto $(1,0)$ no tempo' $1/2$ e com ϕ_2 no tempo $1/\sqrt{2}$. Similarmente considere as várias caminhadas $[0,1] \to [0,1]$ dadas pelos seguintes gráficos:



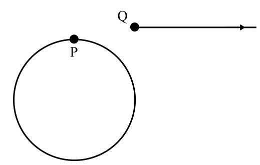
são todas diferentes mas percorrem o mesmo trajeto com início 0 e fim 1. Uma caminhada assim:



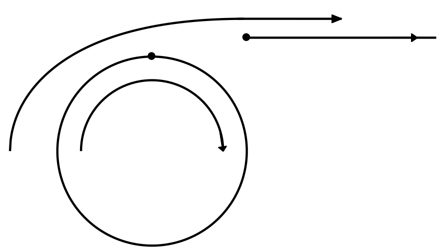
tem o mesmo trajeto mas volta ao início, o fim é 0 também. Embora que "caminhada" seria a palavra melhor, continuaremos usando a palavra já consagrada "caminho".



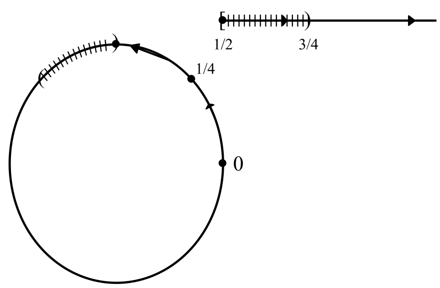
Para representar caminhos colocamos o valor do parâmetro t no ponto $\phi(t)$.

No nosso espaço 

temos os seguintes tipos de caminhos: caminhando para P do lado esquerdo podemos ou passar através de P e continuar em S^1 ou ha hora da chegada ao P, "pular" para Q e continuar em $[0, \infty)$. Repare bem porém que o caminhador não sente nenhum pulo, para ele o espaço localmente é um pedaço de $\mathbb{R}$ tanto passando por P quanto por Q.

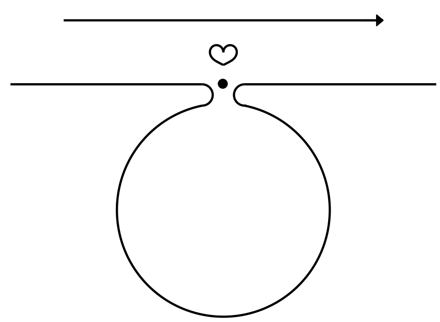


Caminhando para P do lado direito devemos ricar em S^1, um pulo para Q seria um pulo real, uma discontinuidade no caminho:



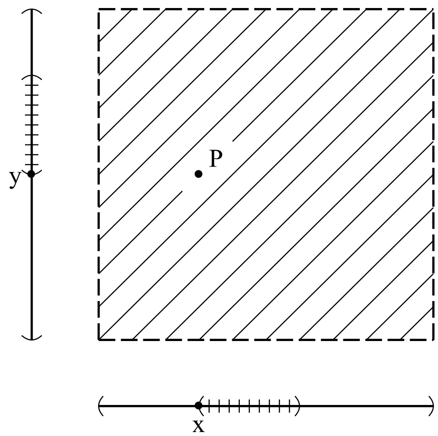
considere um ϕ como no desenho e seja V a vizinhança de Q aí traçada, entao $\phi^{-1}(V) = [1/2, 3/4)$ que não é uma vizinhança de $1/2$ em $[0,1]$ e ϕ nao é contínua.

Uma caminhada possível no espaço $\mathbb{R} \cup \{\heartsuit\}$ é de passar



por $\heartsuit$ sem entrar no intervalo $[-1, 1]$; para alguém que nao sabe de $\heartsuit$ e olha só para o caminhador em $\mathbb{R}$ parece que este ao chegar ao ponto -1 some e reaparece magicamente no mesmo instate no ponto 1 para continuar sua caminhada. Para o nosso excursionista, ele nunca passa por -1, nem por 1, não sabe nada do intervalo $[-1, 1]$, só sabe que está caminhando num espaço que sempre parece uma reta. Se o espaço físico fosse assim eu poderia sumir da avenida Atlântica do Rio de Janeiro e reaparecer em Washington Square de Nova York sem sentir que o espaço em torno de mim tenha deixado de ser um pedaço de R^3.

Como último exemplo de espaços estranhos localmente $\mathbb{R}$ considere duas cópias I_1, I_2 do intervalo $(0, 1)$ e o quadrado aberto $(0, 1) \times (0, 1)$ dispostos assim:



Digamos que os pontos em I_1 e I_2 têm bases de vizinhanças usuais, mas que um ponto $P = (x, y)$ no quadrado tem como base de vizinhança conjuntos de tipo $\{P\} \cup (y, y + \epsilon) \cup (x, x + \epsilon)$ como no desenho. Esse espaço é localmente $\mathbb{R}$ mas todos os pontos do qudrado são pontos de ligação entre I_1 e I_2: caminhando em I_1 de cima para baixo podemos a qualquer instante em vez de passar pelo ponto y (qualquer) passar através um ponto de ligação (x, y) e reaparecer no lado direito do ponto x (qualquer) em I_2 e continuar a caminhada aí.

Essas considerações mostram que já o problema de classilicar e caracterizar os espaços localmente $\mathbb{R}$ é complicadíssimo.

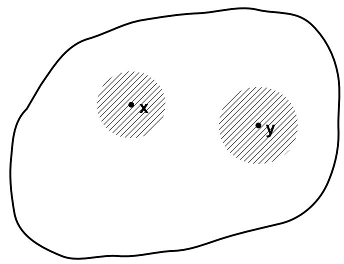
Uma propriedade topológica que distingue os casos mais familiares de S^1, $\mathbb{R}$, dos nossos exemplos estranhos é dada pela seguinte definição importante:

Definição 6.6 *Um espaço topológico* $(X, \mathcal{T})$ *chama-se* de Hausdorff *(ou T2 ou separado) se dados dois pontos distintos* x, y, $x \neq y$ *existem vizinhanças* V_x *de* x *e* V_y *de* y *tais que* $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Em outras palavras qualquer par de pontos distintos tem vizinhanças sem interseção.

O círculo S^1 e a reta $\mathbb{R}$ sao Hausdorff. Os espaços $\mathbb{R} \cup \{\heartsuit\}$ e o espaço do Exemplo 6.4 (e) não sao Hausdorff. A reta com a topologia da ordem $\{\emptyset, X\} \cup \{(r, \infty) \,|\, r \in \mathbb{R}\}$ não é Hausdorff.

Todo espaço métrico é Hausdorff pois se $x \neq y$ então $\delta = d(x, y) > 0$ logo $B_{\delta/3}(x) \cap B_{\delta/3}(y) = \emptyset$; exitem então as vizinhanças requeridas.



Em análise, geometria diferencial, topologia algébrica, quase todos os espaços estudados são Hausdorff, mas em outras áreas como geometria algébrica, espaços não Hausdorff são muito comuns.

A restrição a espaços Hausdorff é bem difícil motivar mas para muitos autores é quase uma regra; as palavras "seja X um espaço topológico Hausdorff" começam muitas definições, artigos, parágrafos, livros, aulas, etc. De modo geral podemos trabalhar sem esta hipótese mas ser Hausdorff é tão forte, simplifica tanto que é usual impor esta condição sem investigar se ela é realmente necessária. Em muitas situações ela é falsa mas então outras condições geralmente limitam os tipos de espaços considerados. (Mas ainda com a imposição de ser Hausdorff existem espaços localmente $\mathbb{R}$ estranhos. Assim a chamada reta cumprida é construída começando com $(-\infty, 0)$ e depois colocando por indução transfinita uma após a outra um n mero não enumerável do cópias de $[0, 1)$. Isto dá um espaço localmente $\mathbb{R}$, mas comprido demais: qualquer sequência de pontos nesse espaço é cotado superiormente que não é verdade para $\mathbb{R}$. Usam-se além de ser Hausdorff vários outros axiomas de separação, aqui apresentamos mais dois, mas faremos pouco uso deles.

Definição 6.7

(a) *Um espaço topológico* $(X, \mathcal{T})$ *é dito ser* T0 *se para qualquer dois pontos* x, $y \in X$, $x \neq y$ *existe uma vizinhança de* pelo menos um *deles que não contém o outro.*

(b) *Um espaço topológico* $(x, \mathcal{T})$ *é dito ser* T1 *se para qualquer dois pontos* x, $y \in X$, $x \neq y$ *existe uma vizinhança de* qualquer um *deles que não contém o outro.*

Evidentemente T2 $\Rightarrow$ T1 $\Rightarrow$ T0. Essas implicações nao sao reversíveis.

Exemplo 6.5

(a) *o espaço de Sierpinski:* $X = \{1, 2\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1\}\}$ *é T0 mas não T1. A vizinhança* $\{1\}$ *de* 1 *não contém* 2 *mas toda vizinhança de* 2 *contém* 1*.*

(b) *A reta* $\mathbb{R}$ *com* $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \cup \{(r, \infty) \mid r \in \mathbb{R}\}$ *é similarmente T0 mas nao T1.*

(c) *Seja* X *um conjunto infínito, a topologia de complementos de conjuntos finitos é T1 mas não T2. Se* x, $y \in X$, $x \neq y$ *então* $X \setminus \{y\}$ *é uma vizinhança de* x *não contendo* y *e* $X \setminus \{x\}$ *é uma vizinhança de* y *não contendo* x*. Como qualquer dois abertos tem interseção nao vazia, o espaço nao é T2.*

Uma caracterização de espaços T1 é o seguinte:

Teorema 6.1 *Um espaço topológico* $(X, \mathcal{T})$ *é T1 se e somente se todo ponto* $\{x\}$ *é um conjunto fechado.*

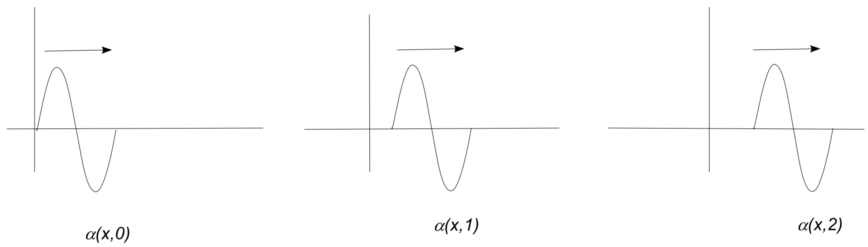
Exercício 6.1 *Demonstre o Teorema 6.1.*

6.1 Uma Estória Não Totalmente Topológica

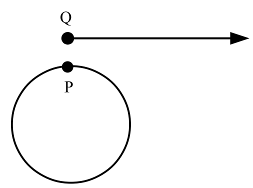
Considere uma função numérica $f : X \to \mathbb{R}$ num espaço X localmente $\mathbb{R}$. Como X parece localmente um pedaço da reta, podemos tentar definir a derivada de f usando um homeomofismo local para interpretar f como função num intervalo da reta. Para ser consistente isso é possível somente se podemos escolher os vários homeomorfismos locais numa maneira coerente (veja qualquer livro de variedades para os detalhes) mas para nós agora basta só saber que isso é possível para os exemplos aqui apresentados. Então faz sentido falar de f satisfazer uma equação diferencial em qualquer um dos nossos espaços introduzidos acima. Em particular considere a equação de onda que localmente é

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}$$

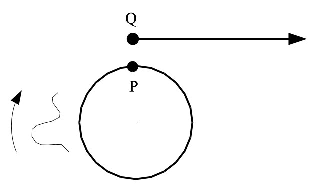
onde x é uma coordinata local em X e t é o tempo. No caso da reta a solução geral dessa equação é $f(x, t) = \alpha(x - t) + \beta(x + t)$ onde α e β são funções duas vezes diferenciáveis. A interpretação do termo $\alpha(x - t)$ é que a forma da onda é preservada mas transladada com velocidade uniforme a direita, (β é transladado a esquerda).



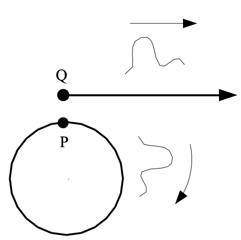
Como satisfazer uma equação diferencial é um fato local, a topologia global só pode impor condições de consistência global e o comportamento local deve ficar o mesmo. Vamos ver como uma onda se comporta no seguinte espaço:



Suponha que no tempo $t = 0$ existe uma onda em S^1 movendo-se na direção indicada.

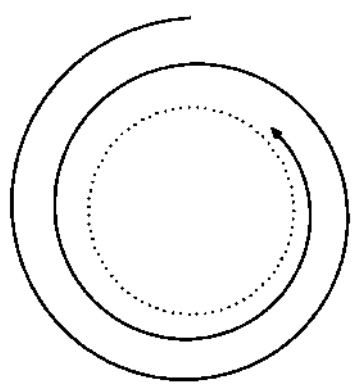


Agora qualquer função contínua f satisfaz $f(P) = f(Q)$, isso é porque existe uma sequência que converge simultâneamente tanto para P quanto para Q. A onda ao chegar a P tem que ter a mesma amplitude em Q e uma vez essa amplitude está alí ela vai se propagar a direita na parte $[0, \infty)$ do nosso espaço. A onda se duplica, uma cópia sai através de Q, a outra continua através de P.



Para alguem situado fora de S^1, o ponto Q parece uma fontes inexaustível de ondas saindo daquele ponto: toda vez a onda em S^1 chega a P ela se duplica e manda uma cópia fora. Uma onda rodando na outra direção nunca sai, mas para consistência ela precisa de uma irmã gêmea chegar da parte $[0, \infty)$ do espaço para manter $f(P) = f(Q)$. As duas cópias se fundem e continuam rodando em S^1.

As ondas comportam-se então de maneira diferente dos caminhos. Um caminho não pode se rachar, a onda deve (ondas são funções $X \to \mathbb{R}$, caminhos são funções $\mathbb{R}$ (ou um subintervalo) $\to X$. Se o espaço físico não fosse Hausdroff, será que toda vez que eu passo do Rio a New York, uma cópia de mim fica no Rio? Se equações diferenciais descrevem matéria, parece que deve ser assim. Mas isto não é exatamente a verdade. A nossa discussão de ondas contem um erro de princípio, falamos de ondas, mas ondas de quê? Se pensarmos em ondas acústicas, $f(x, t)$ e a intensidade de som no ponto x, tempo t, mas tanto f quanto x refer a mesma realidade, deslocamentos no espaço; o som é produzido por deslocamentos da moléculas de ar. Se x agora pertence a um espaço louco, os deslocamentos devem também pertencer a um espaço louco. Mas para introduzir uma equação diferencial para f não é absolutamente necessário supor que f tem valor em $\mathbb{R}$, a derivada é um fenómeno local e f pode tomar valores num espaço localmente $\mathbb{R}$ (com os mesmos cuidados tratados num curso de variedades). Com essa mudança considerando uma onda como função $f : X \to Y$ onde Y é um espaço localmente $\mathbb{R}$ e f satisfaz a equação de onda, podemos construir ondas que não precisam de se duplicarem, que podem ou não mandar cópias fora, e as que podem ter escolha ao chegarem a P de ficar dentro de S^1 ou sair. Nas primeiras equações diferenciais da física, tanto a variável dependente quanto independente referiram a mesma realidade: deslocamento no espaço. A primeira quebra nessa ligação ocorreu nas ondas eletromagnéticas. Este fato foi tão chocante que os físicos tentaram de consertar suas ideias introduzindo o éter; ondas eletromagnéticas seriam então deslocamentos do éter no espaço. Fizeram muitos modelos feios do éter em termos de molas, corpos elásticos, massas, etc. Agora não nos preocupamos com isso, e uma vez uma ideia matemática (como equação diferencial) chama a atenção de matemáticos ela é desenvolvida pelos caminhos internos e exigências da própria matemática. Assim a coerência inicial pode ser perdida. É bom lembrar isso ao tentar fazer modelos matemáticos da realidade externa a ela, os objetos matemáticos muito desenvolvidos já perderam seus laços com a realidade não matemática, e o modelo pode sair mal feito. Isto não é um argumento contra abstrações, mas contra mau pensamento. Um modelo matemático com interpretação física (a semântica do modelo) é um sistema de significações onde a forma é matemática. Não é tudo uma simples correspondência: *objeto matemático* $\leftrightarrow$ *situação na realidade externa*. Isso na linguística corresponde aos nomes: *'cavalo'* $\leftrightarrow$ *o animal assim nomeado*. Há estruturas superior a isto. A derivada por exemplo na mecânica clássica relaciona a velocidade com a posição $v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, e assim joga um papel semelhante ao sufixo 'eiro' que faz 'cavalheiro' do 'cavalo'. O sistema semântico de um modelo então é bem complicado e quando aparecem contradições entre ele e as formas que o sustentam podem sugerir a criação de novas formas. Assim equações diferenciais em espaços localmente $\mathbb{R}^4$ mas não Hausdorff apareceram na cosmologia. As equações de Einstein são dez equações diferenciais para dez funções em $\mathbb{R}^4$. As soluções delas definam uma métrica (de fato uma pseudo-métrica, mas isso não importa aqui) em $\mathbb{R}^4$, mas precisamos entender isso so localmente; as soluções definam somente um pedaço de $\mathbb{R}^4$ e uma métrica aí. Como colar esses pedaços para construir um espaço global, o que seria um modelo do espaço-tempo físico, é outro problema que foi resolvido para muitas soluções originais. Esse espaço global inicialmente sempre foi pressuposto Hausdorff. Num desses surgiu o seguinte paradoxo. Uma pessoa em queda livre no espaço-tempo segue um trajeto especial chamado geodésica, o comprimento do arco nessa geodésica (respeito a métrica determinada pelas equações de Einstein) é o tempo vivido por essa pessoa, é proporcional ao andamento do seu relógio. No espaço sob consideração (o assim chamado espaço de Taub-NUT) existem geodésicas com comprimento do arco finito embora que o trajeto não tem fim. Geometricamente elas são espirais que aproximam um círculo, são curvas sem fim com comprimento finito (lembra que $[0, T) \simeq [0, \infty)$.



E o coitado que está caindo livremente assim, quando seu relógio diz T, onde está? O espaço em todos os outros aspectos é perfeitamente não singular. Nenhuma quantidade física é infinita em ponto algum, nada mais parece estranho, só as quedas livres. Acontece que podemos salvar quase todos o nossos amigos condenados, juntando mais duas cópias do espaço Taub-NUT numa maneira não Hausdorff mas localmente $\mathbb{R}^4$ ao espaço original. (Uma cópia para espirais a direita, outra a esquerda). O nosso amigo simplesmente sai para um outro espaço numa maneira contínua e até diferenciável. As equações de Einstein continuam sendo satisfeitas em todos os pontos.

Não pretendemos sugerir que o espaço-tempo físico é assim, mas sublinhar o fato que o conteúdo semântico de um modelo (*comprimento do arco* $\leftrightarrow$ *tempo vivido*) dá lugar a formas novas e saídas inesperadas de paradoxos aparentes. A riqueza do formalismo topológico é que ele pode carregar conteúdos variados embora não todos.

Capítulo 7

Topologias finais e espaços quocientes

Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topolôgico e Y um conjunto. Considere uma aplicação $f : X \to Y$. Considere agora todas as topologias em Y com f contínua. Tais existem pois f é contínua com a topologia grosseira em Y. A topologia grosseira é então a mínima topologia com f contínua. Como esta não depende de f não dá nenhuma informação sobre f. Se f for uma função constante a máxima topologia com f contínua seria a topologia discreeta. Num certo sentido então a máxima topologia com f continua refleteria a variação de f. Esta topologia existe. Seja $\mathcal{T}_Y$ qualquer topologia com f contínua então para qualquer $U \in \mathcal{T}_Y$, $f^{-1}(U)$ é aberto em X. A mais forte dessas topologias então seria aquela definida por: U é aberto em $Y \Leftrightarrow f^{-1}(U)$ é aberto em X.

Definição 7.1 *A topologia definida acima chama-se* topologia final *em relação a aplicação f.*

Exercício 7.1 *A topologia final induzida em $Y \setminus f(X)$ é a discereta.*

Por força do Exercício 7.1 frequentemente consideramos a topologia final somente no subconjunto $f(X) \subset Y$. Para melhor entender esta topologia introduzimos certas construções.

Definição 7.2 *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação entre dois conjuntos. Se $T \subset X$ chame o conjunto $\tilde{T} = f^{-1}(f(T))$* a saturação *de T e chame um conjunLo T* saturado *se $\tilde{T} = T$*

Note que toda imagem inversa $f^{-l}(S)$ de subconjuntos $S \subset Y$ é saturado.

Observe que a saturação é um fecho de Kurotowski segundo o Exercício 4.4 e assim define uma topologia em X que chamaremos de topologia *saturada*, $\tilde{\mathcal{T}}$.

Definição 7.3 *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $S \subset X$, dizemos que N é uma* vizinhança *de S se e somente se existe um aberto A tal que $S \subset A \subset N$, ou seja $S \subset N^o$.*

Note que esta definição é análoga a da vizinhança de um ponto; use o mesmo tema de interpolação por abertos.

Definição 7.4 *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $S \subset X$. Uma família ϑ de vizinhanças de S chama-se uma* base de vizinhanças *de S se e somente se dado qualquer vizinhança N de S existe um elemento $V \in \vartheta$ tal que $V \subset N$.*

Teorema 7.1 *A topologia final satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) *Um conjunto $C \in Y$ é fechado na topologia final se e somente se $f^{-1}(C)$ é fechado em X.*

(b) *Uma família $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(f(X))$ é uma base da topologia final em $f(X)$ se e somente se a família $\{f^{-1}(B) \,|\, B \in \mathcal{B}\}$ é uma base para $\mathcal{T} \cap \tilde{\mathcal{T}}$. Isto é, todo aberto saturado é reunião de conjuntos de forma $f^{-1}(B)$, $B \in \mathcal{B}$.*

(c) *Um conjunto ϑ de subconjuntos de $f(X)$, $\vartheta \subset \mathcal{P}(f(X))$ é uma base de vizinhanças da topologia final de um ponto $y \in f(X)$ se e somente se a família $\{f^{-1}(V) \,|\, V \in \vartheta\}$ é uma base de vizinhanças de $f^{-1}(y)$ na topologia $\mathcal{T} \cap \tilde{\mathcal{T}}$. Isto é, qualquer aberto saturado W tal que $f^{-1}(y) \subset W$, existe um $V \in \vartheta$ tal que $f^{-1}(y) \subset V \subset W$.*

Demonstração:

(a) Imediato.

(b) ($\Rightarrow$) Seja $U \subset X$ um aberto saturado, então $U = f^{-1}(f(U))$ e pela definição da topologia final, $f(U)$ é aberto em Y. Logo $f(U) = \bigcup_\alpha B_\alpha$ ' $\alpha \in A$, $B_\alpha \in \mathcal{B}$. Assim $U = \bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$.

($\Leftarrow$) Seja $G \subset f(X)$ aberto na topologia final, então $f^{-1}(G) = \bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$, $\alpha \in A$, $B_\alpha \in \mathcal{B}$, pois $f^{-1}(G)$ é um aberto saturado. Disto segue $G = \bigcup_\alpha B_\alpha$.

(c) ($\Rightarrow$) Seja W um aberto saturado tal que $f^{-1}(y) \subset W$. Sendo $W = f^{-1}(f(W))$, $f(W)$ é aberto na topologia final e sendo $y \in f(W)$ existe um $V \in \vartheta$ com $y \in V \subset f(W)$. Logo: $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V) \subset W$.

($\Leftarrow$) Seja N uma vizinhança de y na topologia final, enão $y \in N^o \subset N$ e $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(N^0) \subset f^{-1}(N)$. Sendo $f^{-1}(N^o)$ um aberto saturado, existe um $V \in \vartheta$ tal que $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V) \subset f^{-1}(N^o) \subset f^{-1}(N)$ logo $y \in V \subset N$.

$\diamondsuit$

Passamos agora ao uso mais comum da topologia final, a topologia quociente. Primeiro certas considerações relevantes.

Definição 7.5 *Seja X um conjunto. Uma relação $\sim$ em X é dita ser uma* relação de equivalência *se ela satis-faz:*

1. $x \sim x, \forall\, x \in X$ (reflexividade)

2. $x \sim y \Rightarrow y \sim x, \forall x,\, y \in X$ (simetria)

3. $x \sim y$ *and* $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (transitividade)

A relação de igualdade, $x = y$ é uma relação de equivalência. A relação total: $x \sim y$ para quaisquer x, y é também uma relação de equivalência. Se considerarmos uma relação R como o subconjunto $\{(x, y) \,|\, xRy\} \subset X \times X$ a relação de igualdade corresponde ao diagonal $\Delta = \{(x, x) \,|\, x \in X\} \subset X \times X$ e a relação total ao $X \times X$ todo. É fácil ver que a interseção de qualquer família de relações de equivalência é uma relação de equivalência. O conjunto de todas as relações de equivalências em X é parcialmente ordenado pela inclusão $\sim_1 \leq \sim_2 \Leftrightarrow \sim_1 \subset \sim_2$ como subconjuntos de $X \times X$. Isto é equivalente a $x \sim_1 y \Rightarrow x \sim_2 y$. A igualdade é a relação de equivalência mínima e a relação total é a máxima. Toda família $\mathcal{F}$ de relações de equivalência tem ínfimo e supremo onde $\inf \mathcal{F} = \bigcap_{E \in \mathcal{F}} E$ e $\sup \mathcal{F}$ é a interseção de todas cotas superiores de $\mathcal{F}$ (tais existem pois a relação total é a máxima).

Qualquer conjunto $\mathcal{R}$ de relações em X então gera uma relação de equivalência; a mínima relação de equivalência E que satisfaz $E \supset R, \forall\, R \in \mathcal{R}$. Notaremos essa relação por $E[\mathcal{R}]$. Se R consiste de uma relação só: $\mathcal{R} = \{R\}$ escrevemos $E[R]$. Evidentemente $E[\mathcal{R}] = E\left[\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R\right]$, e se $\mathcal{F}$ é uma família qualquer de *relações de equivalência* então $\sup \mathcal{F} = E\left[\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F\right]$ Por exemplo a igualdade é gerado pela relação vazia $\Delta = E[\emptyset]$ e a relação total pela desigualdade $X \times X = E[\neq] = E[\Delta^c]$.

Essas considerações são paralelas àquelas sobre topologias.

Definição 7.6 *Dado uma relação de equivalência* $\sim$ *em* X *e seja* $x \in X$ *define a* classe $[x]$ *de* x *como* $[x] = \{y \mid x \sim y\}$. *Este é o conjunto de todos os pontos equivalentes a* x.

Teorema 7.2 *As classes de equivalência satisfazem:*

(a) $x \in [x]$

(b) *se* $y \in [x]$ *então* $[y] = [x]$

Demonstração:

(a) Segue de $x \sim x$.

(b) $z \in [y]$, $w \in [x]$ e $y \in [x] \Leftrightarrow y \sim z, x \sim y,$ e $y \sim x \Rightarrow x \sim z$ e $y \sim w \Rightarrow$ $z \in [x]$ e $w \in [y]$.

Destes dois fatos seguem as seguintes

1. $X = \bigcup [x]$. Isto é consequência de (a).
2. Ou $[x] = [y]$ ou $[x] \cap [y] = \emptyset$.
   Pois por (b) se $z \in [x] \cap [y]$ então $[z] = [x]$ e $[z] = [y] \Rightarrow [x] = [y]$.

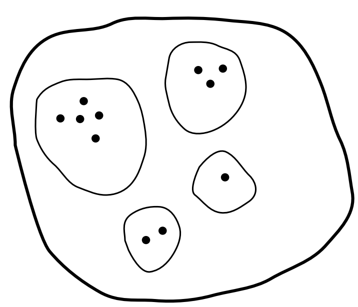
$\diamondsuit$

Em outras palavras as classes de equivalê cia formam uma *partição* de X, onde definimos:

Definição 7.7 *Uma família* $\mathcal{Q}$ *de subconjuntos não vazios de* X *é uma* partição *de* X *se e somente se*

(a) $X = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q$

(b) Q_1, $Q_2 \in \mathcal{Q}$, $Q_1 \neq Q_2 \Rightarrow Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.



Em outras palavras o conjunto apresentado como uma reunião disjunta de subconjuntos.

Se agora consideramos todoso os elementos que pertencem ao mesmo elemento da partição como sendo equivalentes num certo sentido, chegamos a definir uma relação de equivalência cujas classes de equivalência são exatamente os elementos da dada partição: Isto é, defina

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{ existe um } Q \in \mathcal{Q} \text{ tal que } x \in Q,\, y \in Q.$$

Isto é uma relação de equivalência e se $x \in Q$, $Q \in \mathcal{Q}$, então $[x] = Q$. Existe então uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todas as relações de equivalência em X e o conjunto de todas as partições de X. As partições dão um método prático de definir relações de equivalência. A partição que corresponde a igualdade é $\mathcal{Q} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ e a partição da relação total é $\mathcal{Q} = \{X\}$.

Definição 7.8 *Se X é um conjunto e $\sim$ uma relação de equivalência em X, o conjunto de todas as classes de equivalência chama-se* conjunto quociente *e denota-se por $X/{\sim}$.*

Assim $X/{\sim} = \{[x] \mid x \in X\}$, isto é, o conjunto quociente é o conjunto dos membros da partição que corresponde a $\sim$; é a partição mesma.

Definição 7.9 *A aplicação $X \xrightarrow{\phi} X/{\sim}$ que leva todo x na sua classe de equivalência $[x]$, $\phi(x) = [x]$ chama-se* ap1icação canônica.

A aplicação canônica é sobrejetora.

Note que qualquer sobrejeção $X \xrightarrow{f} Y$ pode ser considerada como aplica ão canônica. Defina em X a seguinte relação de equivalência: $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$. A partição que corresponde a isto é $\mathcal{Q} = \{f^{-1}(\{y\}) \mid y \in Y\}$, logo $X/{\sim}$, que é igual a $\mathcal{Q}$, está numa correspondência biunivoca com $Y : [x] \leftrightarrow f(x)$. Numa classe de equivalência então nós recolhemos todos os pontos onde f tem o mesmo valor. A aplicação f então é uma composição $X \xrightarrow{\phi} X/{\sim} \xrightarrow{f_0} Y$, $f = f_0 \circ \phi$ onde ϕ é a aplicação canónica e f_0 uma bijeção $f_0([x]) = f(x)$.

Agora para qualquer aplicação $X \xrightarrow{f} Y$ podemos primeiro escrever $X \xrightarrow{f} \mathrm{Im}(f) \xhookrightarrow{i} Y$ e depois $X \xrightarrow{\phi} X/{\sim} \xrightarrow{f_0} \mathrm{Im}(f) \xhookrightarrow{i} Y$ então toda aplicação é composi ão de uma aplicação canônica, uma bijeção, e uma inclusão.

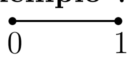
Note que um subconjunto $S \subset X$ é saturado em relação a uma aplicação canônica $\phi : X \to X/{\sim}$ se e somente se ele é reunião de classes de equivalência de $\sim$.

Considere agora um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ e seja $\sim$ uma relação de equivalência em X e $\phi : X \to X/{\sim}$ a aplicação canônica.

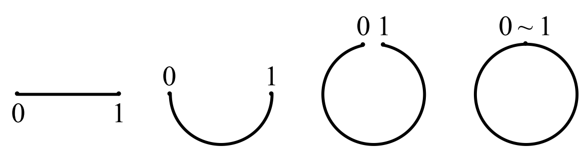
Definição 7.10 *A* topologia quociente *em $X/{\sim}$ é a topologia final respeito a aplicação canônica ϕ.*

Um subconjunto $U \subset X/{\sim}$ então é aberto na topologia quociente se e somente se $\phi^{-1}(U)$ é aberto em X.

Nota que isso não significa que a imagem de um aberto em X é um aberto em $X/{\sim}$; se $G \subset X$ é aberto $\phi(G)$ é aberto em $X/{\sim}$ se e somente se $\phi^{-1}(\phi(G))$ é aberto em X e como este conjunto geralmente não é igual a G não podemos afirmar que ele é aberto, e em geral não é. Para entender melhor essas topologias consideremos o seguinte exemplo.

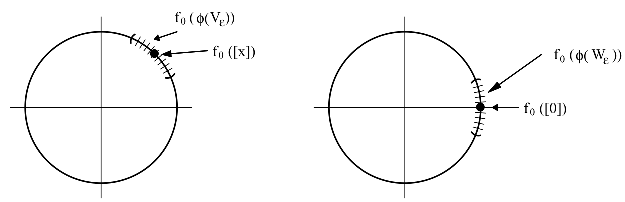
Exemplo 7.1 *Seja $X = [0, 1]$ (na topologia induzida de $\mathbb{R}$);*


. Agora identificamos 0 e 1 pensamos neles como sendo equivalentes. Isso quer dizer que passamos à relação de equivalência gerada pela relação que relaciona só 0 e 1. Escreveremos $0 \sim 1$ quando fazemos essa construção. Nessa relação de equivalência, $0 \sim 1$ e todos os pontos $r \in (0, 1)$ são equivalentes só a si mesmos. A partição que corresponde a isso, é $\{\{0, 1\}, \{\{r\} \,|\, r \in (0, 1)\}\}$; isso é $[0] = \{0, 1\} = [1]$; $[r] = \{r\}$, $r \in (0, 1)$. Se olharmos para as seguintes deformações



podemos pensar que $[0.1]/\sim \,\simeq S^1$. Isso de fato é verdade. Considere a seguinte sobrejeção $[0, 1] \xrightarrow{f} S^1 \subset \mathbb{C}$ definido por $f(x) = e^{2\pi i x}$ Essa aplicação pode ser fatorizada $[0, 1] \xrightarrow{\phi} [0, 1]/{\sim} \xrightarrow{f_0} S^1$ onde reparamos que a relação $\sim$ é exatamente aquela gerada pela identificação $0 \sim 1$ pois $f(x) = f(y)$ se e somente se $x = y$ ou $x, y \in \{0, 1\}$; f é injetor em $(0, 1)$. Mostramos que f_0 é um homeomorfismo entre S^1 $[0, 1]/{\sim}$ com a topologia quociente. Obviamente f_0 é bijetora. Seja agora $U \subset S^1$ um aberto e considere $f_0^{-1}(U) \subset [0, 1]/{\sim}$, este é aberto na topologia quociente pois $\phi^{-1}(f_0^{-1})(U) = f^{-1}(U)$ e como f é contínua esse conjuntoé aberto em $[0, 1]$ e daí é aberto em $[0, 1]/{\sim}$ pela definição da topologia quociente. Então f_0 é contínua. Para mostrar f_0^{-1}

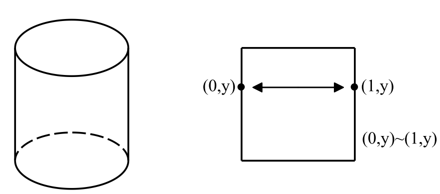
contínua temos que mostrar que para todo aberto $W \subset [0,1]/\sim$, $(f_0^{-1})^{-1}(W)$ *é aberto em* S^1 *mas esse conjunto é* $f_0(W)$*; precisamos assim mostrar que* f_0 *leva abertos em abertos. Para isso basta mostrar que* f_0 *leva uma base de vizinhanças abertas de* $[x]$ *em abertos. Agora para* $r \in (0,1)$ *temos* $\phi^{-1}([r]) = r$ *e uma base de vizinháças saturadas de* r *é dada por* $V_\epsilon = (r-\epsilon, r+\epsilon)$, ϵ *suficientemente pequeno. Logo os conjuntos* $\phi(V_\epsilon) = \{[s] \,|\, s \in (r-\epsilon, r+\epsilon)\}$, ϵ *suficientemente pequeno é uma base de vizinhanças de* $[r]$ *na topologia quociente. Para* $[0] = [1]$ *temos* $\phi^{-1}([0]) = [0,1]$ *e uma base de vizinhanças saturadas de* $\{0,1\}$ *é dada por* $W_\epsilon = [0,\epsilon) \cup (1-\epsilon, 1]$, ϵ *suficientemente pequeno. Logo uma base de vizinhança de* $[0]$ *na topologia quociente é dada por* $\phi(W_\epsilon)$, ϵ *suficientemente pequeno. Agora* $f_0(\phi(V_\epsilon)) = f(V_\epsilon) = \{e^{2\pi i x} \,|\, x \in (r-\epsilon, r+\epsilon)\}$ *é um arco aberto do círculo, logoé aberto, e* $f_0(\phi(W_\epsilon)) = f(W_\epsilon) = \{e^{2\pi i x} \,|\, x \in [0,\epsilon) \cap (1-\epsilon, 1]\}$ *também é um arco aberto do círculo e logo é aberto. Assim* f_0 *leva abertos em abertos e é assim um homeomorfismo.*



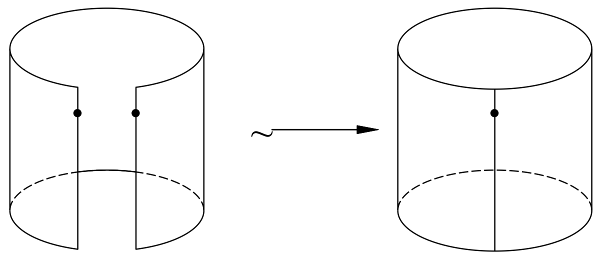
No mesmo espírito identificamos outros espaços quocientes.

Exemplo 7.2

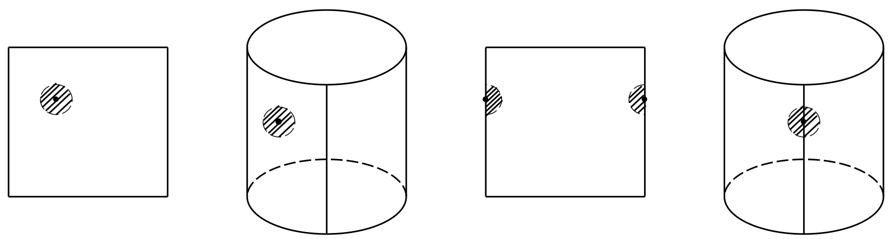
(a) *O cilindro* $\{x^2+y^2 = 1 \,|\, |z| \leq 1\}$ *é o espaço quociente de um quadrado* $\{(x,y) \,|\, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ *pela relação de equivalência que identifica o ponto* $(0,y)$ *com* $(1,y))$, $\forall\, y$



Intuitivamente é assim:

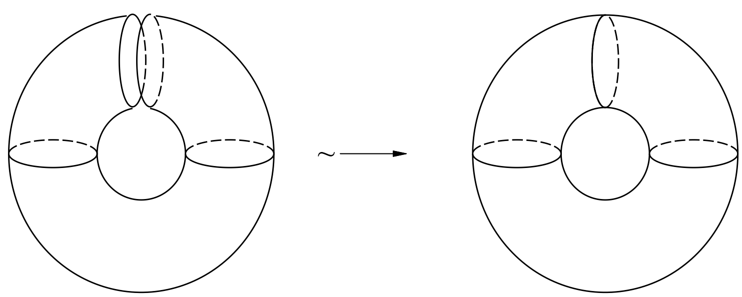


e as imagens inversas de vizinhanças no cilindro são assim:

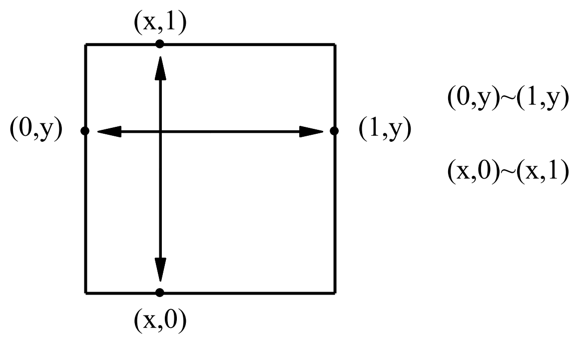


o que identifica a topologia usual no cilindro como a topologia final respeito as identificações no quadrado.

(b) *O toro bidimensional* T^2 *é obtido identificando as duas bocas do cilindro na maneira desenhada:*

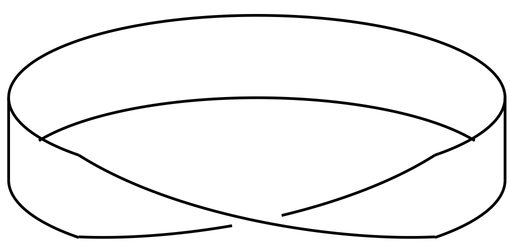


em termos do quadrado original isso corresponde a acrescentar as identifjcações $(x, 0) \sim (x, 1)$ *às anteriores:*

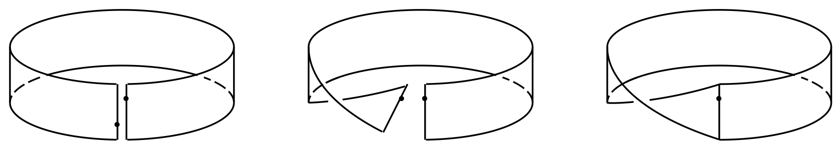


Note que o toro pode ser alcançado ou diretamente fazendo as identificações no quadrado acima, ou em duas etapas, primeiro identificando pontos no quadrado para obter um cilindro e depois identificando ponto no cilindro. Esta é uma propriedade geral que mostraremos depois.

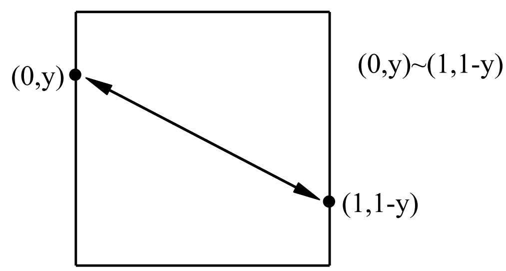
(c) *A faixa de M*



é obtida a partir de uma outra identificação de pontos num quadrado. Considere os seguintes desenhos:

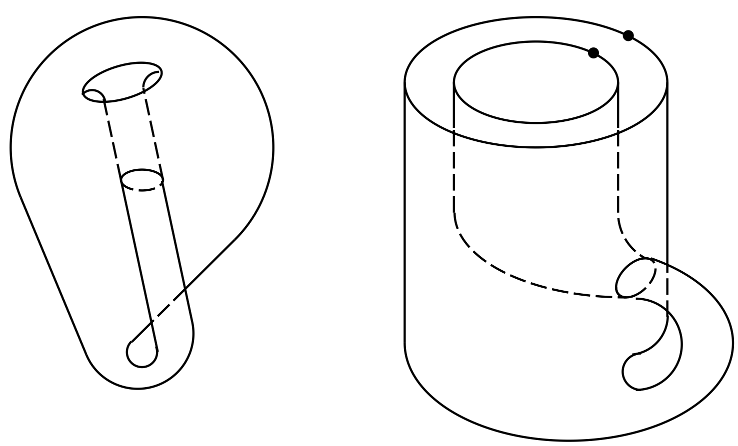


Esses sugerem q

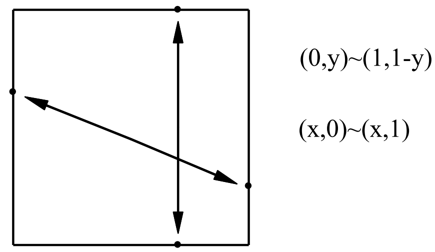


e de fato a faixa de Möbius como espaço topo1ógico é definido assim.

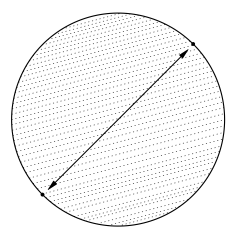
(d) *A garrafa de Klein é obtida identificando as bocas de um cilindro numa maneira diferente. (A superfície no desenho se intercepta pois não é possível mergulhar a garrafa de Klein em* $\mathbb{R}^3$*).*



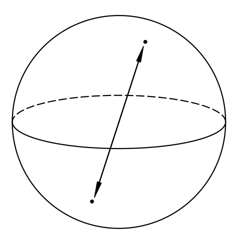
Em termos do quadrado original este espaço é obtido pelas identificações $(x, 0) \sim (x, 1)$ *e* $(0, y) \sim (1, 1 - y)$*, isto é:*



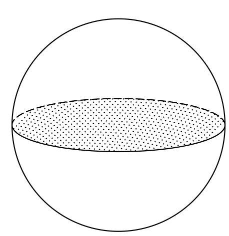
(e) *O plano projetivo* $\mathbb{P}^2$ *é obtido por uma identificaçio de pontos num disco fechado.*



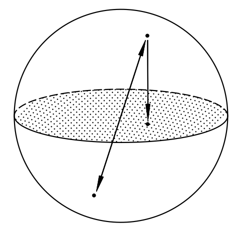
Identificamos todo ponto na circunferência do disco com seu ponto antípodo. O mesmo espaço pode ser obtido identificando pontos antípodos numa esfera S^2.



Para ver que este espaço é o mesmo $\mathbb{P}^2$ *considere o disco equatorial dentro da esfera.*

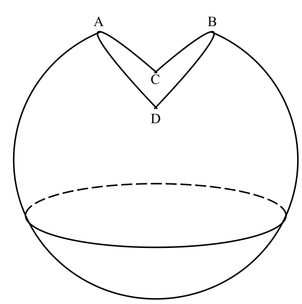


Para qualquer par de pontos antípodos que não estão na circunferência deste disco projete o ponto do hemisfério superior no disco; isto dá um único ponto no disco que representa o par de pontos em S^2.

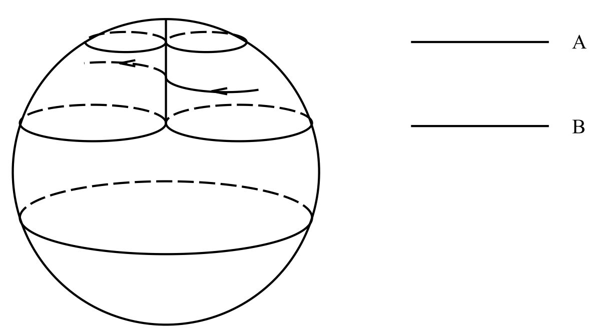


Para pares na circunferência deste disco temos que ficar com ambos os pontos sem esquecer da sua identificação. Isto dá um homeomorfismo entre os dois espaços quocientes.

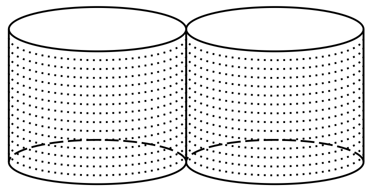
O plano projetivo pode tamb6m ser representado (mas não mergulhado) como uma superfície com auto-interseção em $\mathbb{R}^3$. Mergulhe o disco em $\mathbb{R}^3$ como no desenho:



Agora cole AD ao BC e AC ao BD (aqui deve haver uma auto-interseção). Isto dá a segu

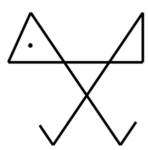


A parte entre as seçoes horizontais A e B e uma fita que se intercepta

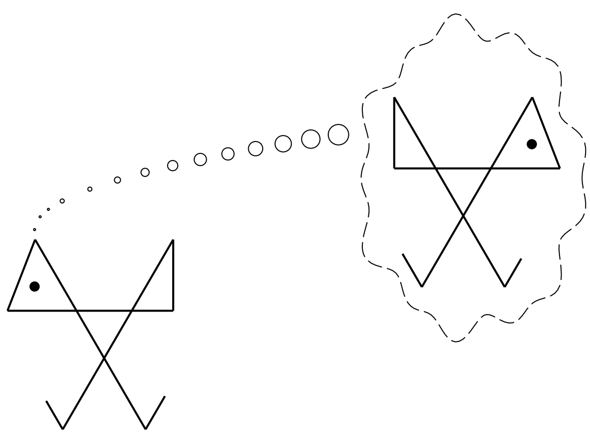


A garrafa de Klein e o plano projetivo são espaços possui uma propriedade que os distingue de espaços como a esfera e o toro.

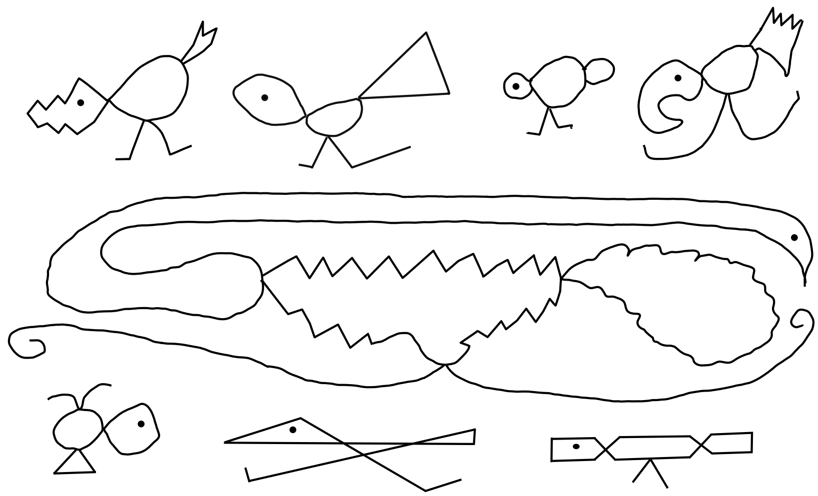
A esfera e o toro são orientáveis e a garrafa de Klein e o plano projetivo não o são. Considere um espaço localmente R^2 (como são todos os quatro aqui considerados) e um pássaro que mora nele e que nós



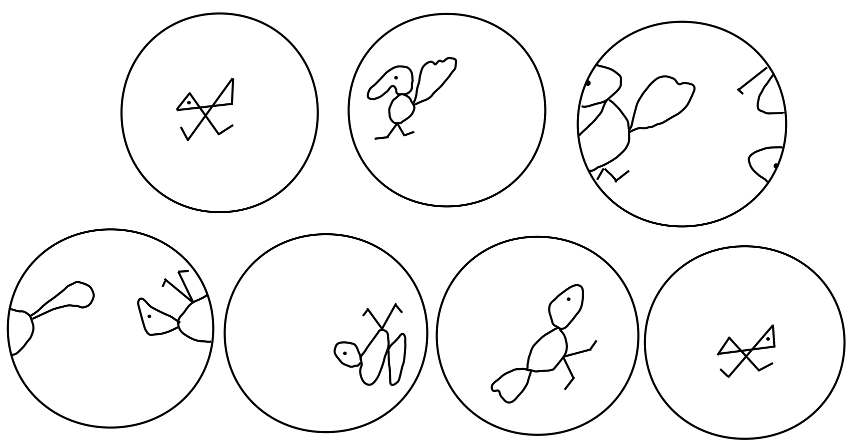
consideramos como um espaço com topologia induzida. O passaro está apaixonado pela sua imagem no espelho, é o seu ideal.



Ele está sempre tentando se transformar na sua imagem mas como ele é um bicho topológico ele só pode se deformar continuamente e andar continuamente pelo espaço ficando sempre homeomorfo à sua forma original.



Na esrera e no toro o pássaro nunca pode realizar sua ambição. Pode andar e se transformar quanto quiser mas nunca pode se transformar na sua image. Na garrafa de Klein e no plano projetivo ele é feliz pois dando uma volta ele se transforma na sua imagem querida.



Se o espaço físico fosse não orientável, um viajante poderia voltar com seu coração no lado direito do corpo. Mais ainda pior, ele vai morrer de fome pois todas as moléculas do seu corpo são transformadas nas suas imagens num espelho, e como seu metabolismo usa catalizadores orgânicos, cuja açao depende muito das formas geométricas das moléculas, ele não pode mais metabolizar a comida. Isso é nosso ponto de vista, mas segundo ele, ele nunca sofreu alteração descontínua alguma, ele voltou a um mundo etranho onde todo mundo dirige no lado errado da rua, a comida é insuportável, e os corações de pessoas ficam num lugar errado. Sente que esquerda e direita ficaram o que eles sempre eram, e só que todos os seus amigos mudaram de idéia a respeito disso.

Podemos pelo menos intuitivamente entender porque a garrafa de Klein e o plano projetivo não podem ser mergulhados em $\mathbb{R}^3$. Esses espaços (localmente $\mathbb{R}^2$) só tem por assim dizer um lado. Mas uma superfície fechada em $\mathbb{R}^3$ divide o espaço em duas partes, a que está dentro e a que está fora a assim deve ter dois lados. Um conjunto bidimensional em $\mathbb{R}^4$ porém não pode dividir o espaço em duas partes (do mesmo jeito que uma curva não divide $\mathbb{R}^3$) e um mergulho agora de fato torna-se possível.

Antes de dar outros exemplos de topologias quocientes, mostremos uma propriedade importantíssima da topologia final.

Teorema 7.3 *(Propriedade Universal) – Seja $(X, \mathcal{T}_X)$ um espaço topológico, Y um conjunto $f : X \to Y$ uma aplicação e seja $f(\mathcal{T}_X)$ a topoJogia final em Y respeito a f. Seja $(Z, \mathcal{T}_Z)$ um espaço topológico qualquer.*

Dado uma aplicação contínua $g : X \to Z$ suponha que g pode ser fatorizado como aplicação *(isto é sem requerer continuidade) através f; $g = \hat{g} \circ f$*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \\ Y \arrow[ur, dotted, "\hat{g}"'] & \end{tikzcd}$$

então g é contínua.

Demonstração: Seja $U \subset Z$ aberto, precisamos mostrar que $g^{-1}(U)$ é aberto em Y, mas como Y tem topologia final este é aberto se e somente se $f^{-1}(\hat{g}^{-1}(U)$ é aberto em X mas $f^{-1}(\hat{g}^{-1}(U)) = g^{-1}(U)$ e como g é contínua este é aberto. $\diamondsuit$

Observação: Como $g = \hat{g} \circ f$ o valor de g fora da imagem de f é arbitrário; defina $\hat{g}$ em $Y \setminus \mathrm{Im}(f)$ como quiser. Para poder definir $\hat{g}$ em $f(X)$ é necessário e suficiente que se tenha: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(x_1) = g(x_2)$ e dado isto defina $\hat{g}(y) = g(x)$ onde $y \in f(X)$ e $y = f(x)$. A condição

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(x_1) = g(x_2)$ significa que a relação de equivalêncla em X definida por g é maior que a definida por f. No caso particular de f sendo uma aplicação canônica $\phi : X \to X/\!\sim$ a existência de g é equivalente a g ser constante nas classes de equivalência em X; g tem que dar o mesmo valor a dois elementos equivalentes para poder definir $\hat{g}$ por $\hat{g}([x]) = g(x)$. A propriedade universal diz que para definir uma função contínua num espaço quociente $X/\!\sim$ basta definir uma função contínua no espaço "desdobrado" X com a condição agora puramente algébrica que essa funçio dá o mesmo valor a pontos equivalentes; não precisamos introduzir novas considerações de continuidade. Como veremos a topologia final é a única com esta propriedade universal.

Uma instância já familiar desta propriedade universal é o método de dar uma funçio contínua no círculo S^1 dando em vez uma função f contínua em $[0,1]$ com $f(0) = f(1)$.

Para a garrafa de Klein, podemos definir uma funçio contínua dando uma função contínua em $[0,1] \times [0.1]$ que satisfaz $f(x,0) = f(x,1)$ e $f(0,y) = f(1,1-y)$. Por exemplo as seguintes quatro funções $f_1(x,y) = (x-1/2)^2$, $f_2(x,y) = y(1-y)$, $f_3(x,y) = \operatorname{sen} 2\pi(x+y-1)$, $f_4 = \operatorname{sen} 2\pi(x-y+1)$. Pode-se mostrar que considerando esses quatro como componentes de uma funçao para R^4, $(x,y) \mapsto (f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y), f_4(x,y))$ dá um mergulho da garrafa de Klein em $\mathbb{R}^4$. Similarmente se pensarmos no plano projetivo como sendo o disco $\{x^2+y^2 \leq 1\}$ com pontos antípodos no perímetro identificados para definir uma função contínua nele, só precisamos de uma função contínua f no disco tal que $f(x,y) = f(-x,-y)$ quando $x^2+y^2 = 1$. Notemos as vantagens da propriedade universal. Suponhamos que só temos a garrafa de Klein mergulhada em $\mathbb{R}^4$; como saberemos depois, esse subconjunto de $\mathbb{R}^4$ deve ser fechado, e toda função contínua nele para $\mathbb{R}$ é uma restrição de uma função contínua em $\mathbb{R}^4$, mas assim temos que trabalhar com funções de quatro variáveis, a propredade universal nos permite trabalhar com funções de somente duas variáveis com certas restrições de tipo algébrico.

A propriedade universal caracteriza a topologa final.

Teorema 7.4 *Suponha que uma aplicação contínua* $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ *satisfaça a propriedade universal, (isto é: dado* $g : (X, \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ *contínua; se* $g = \hat{g} \circ f$, $\hat{g}$ *uma aplicação* $Y \to Z$, *então* $\hat{g}$ *é contínua) então* $\mathcal{T}_Y$ *é a topologia final respeito a* $f : \mathcal{T}_Y = f(\mathcal{T}_X)$

Demonstração: Considere o espaço $(Y, f(\mathcal{T}_X))$ isto é Y com a topologia final.

A aplicação $f(X, \mathcal{T}_X) \to (Y, f(\mathcal{T}_X))$ é continua por definição da topologia final.

$$\begin{tikzcd}
(X, \mathcal{T}_X) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & (Y, f(\mathcal{T}_X)) \\
(Y, \mathcal{T}_Y) \arrow[ur, "\mathrm{id}_Y"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{pmatrix} \mathrm{id}_Y = \text{ identdade} \\ Y \to Y \\ \mathrm{id}_Y(y) = y \end{pmatrix}$$

mostra que $\mathrm{id}_Y : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (Y, f(\mathcal{T}_X))$ é contínua pela propriedade universal, mas então $f(\mathcal{T}_X) \leq \mathcal{T}_Y$ ($U \in f(\mathcal{T}_X) \Rightarrow \mathrm{id}^{-1}(U) = U \in \mathcal{T}_Y$) e como $f(\mathcal{T}_X)$ é a mais forte topologia com f contínua tem-se também $\mathcal{T}_Y \leq f(\mathcal{T}_X)$ então $\mathcal{T}_Y = f(\mathcal{T}_X)$. $\diamondsuit$

O seguinte corolário dá uma técnica para identificar espaços quocientes.

Corolário 7.1 *Seja (X, T) um espaço topo1ógico e $\sim$ uma relação de equivalência em X. Suponha que temos uma sobrejeção $f : X \to Y$ contínua, e que a relação de equivalência definida em X por f é exatamente $\sim$(isto é: $f(x) = f(x') \Leftrightarrow x \sim x'$). Se a topologia em Y é a topologia final $f(\mathcal{T})$ então $Y \simeq X/\sim$.*

Demonstração: As hipóteses implicam na existência de uma bijeção h no seguinte diagrama:

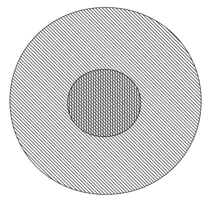
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & Y \arrow[dl, "h"] \\
X/\sim &
\end{tikzcd}$$

Use a propriedade universal tanto de $X \xrightarrow{f} y$ quanto de $X \xrightarrow{\phi} X/\sim$ para concluir que h é bicontínuo. $\diamondsuit$

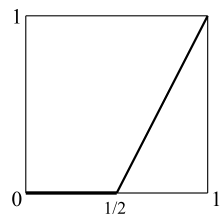
Assim podemos simplificar muito o trabalho do Exemplo 7.1 mostrando simplesmente que a topologia usual em S^1 é a topologia final respeito a f lá definido.

Mostramos detalhadamente o uso deste corolário.

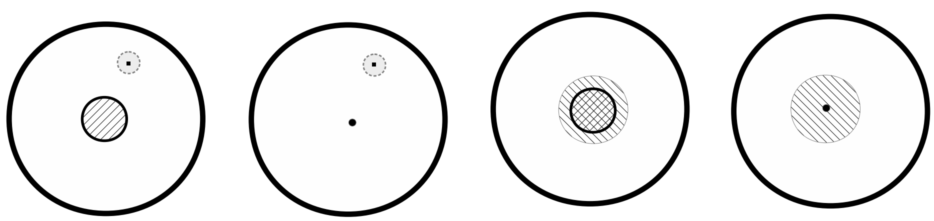
Exemplo 7.3 *Considere o disco* $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ *e o subconjunto* $A = \{x^2 + y^2 \leq 1/2\}$*. Introduza agora a relação de equivalência que identifica todos os pontos de* A*. Isto é* $a \sim a'$ *para todo* $a, a' \in A$*.*



O conjunto quociente $D/\sim$ *(também escrito* $D//A$*) é o resultado do colapso de* A *a um ponto. Pensando de* D *como se fosse feito de borracha e contraindo* A *a um ponto esperamos que* $D/\sim\, \simeq D$*. Isto é de fato verdade; introduza a sobrejeção* $D \xrightarrow{f} D$ *dado por* $f(x) = \rho(\|x\|)x$ *onde* $\rho : [0,1] \to [0,1]$ *é a função com o gráfico*



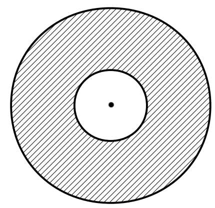
Então f *empurra os pontos na direção da origem.* f *é sobrejetora e a relação de equivalência que ele define é a dada. Os seguintes desenhos mostram que a topologia usual em* D *é a topologia final pelo* f *logo* $D/\sim\, \simeq D$*.*

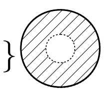


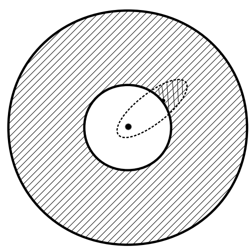
Imagens inversas de vizinhanças usuais de y *dão bases para vizinhanças saturadas de* $f^{-1}(\{y\})$*. A operação da saturação é:*

$$\tilde{S} = \begin{cases} S & S \cap A = \emptyset \\ S \cup A & S \cap A \neq \emptyset \end{cases}$$

Exemplo 7.4 *Considere o mesmo disco D mas agora seja $A = \{x^2 + y^2 < 1/2\}$ um disco aberto. Mostraremos que $D//A$ é o espaço feito do anel $\{1/2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ mais a origem $\{0\}$ porém com uma topologia estranha. Seja então $Y = \{1/2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{0\}$ com as seguintes bases de vizinhanças.*

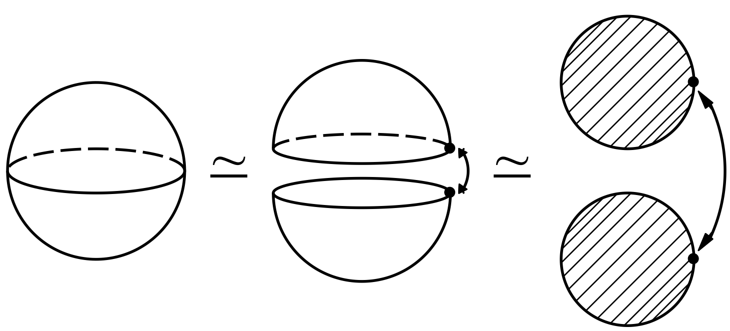


No anel semi-aberto $\{1/2 < x^2 + y^2 \leq 1\}$  *todos os pontos tem bases usuais; o ponto $\{0\}$ é aberto; um ponto no círculo $\{x^2 + y^2 = 1/2\}$ tem como base as seguintes vizinhanças: vizinhança usual $\cup \{0\}$. Essa topologia não é*



Hausdorff. Introduzindo a sobrejeção $D \xrightarrow{f} Y$ (identidade no anel e todo A vai a origem) vemos que a operação da saturação é a mesma como no Exemplo 7.2. Assim se pode mostrar que a topologia definida em Y é a topologia fi

Uma outra ... guinte fato intuitivo: ... ências.



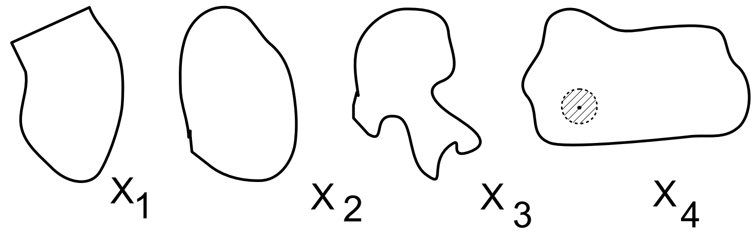
Agora as colagens sao feitas com identificações (relações de equivalência) mas o que seria pegar dois discos, isto é, duas cópias do mesmo disco? Queremos definir a *reunião disjunta* de dois conjuntos X, Y. A reunião usual $X \cup Y$ não é boa pois X e Y podem ter pontos em comum e nós queremos mantê-los separados. Por exemplo $[0,1] \cup [0,1] = [0,1]$ mas o que queremos é pegar duas cópias separadas de $[0,1]$ e reuní-las sem fazê-las coincidir. Mais geralmente seja X_α uma família qualquer de conjuntas, queremos reuní-la disjuntamente sem fazer coincidir pontos nos X_α com índices diferentes embora que os conjuntos possam ter pontos em comum. Pense assim: se pudermos colorir os pontos de cada X_α com uma cor diferente para índces diferentes então não vamos confundir pontos de cores direrentes. Na matemática não temos cores mas considere o conjunto $\{\alpha\} \times X_\alpha$, isto é um conjunto de pares (α, x), $x \in X_\alpha$ onde o primeiro membro é o mesmo para todo par. Pense em α como a cor de x em X_α. Para $\alpha \neq \beta$ os conjuntos $\{\alpha\} \times X_\alpha$ e $\{\beta\} \times X_\beta$ são diferentes pois $(\alpha, x) = (\beta, y) \Leftrightarrow \alpha = \beta$ e $x = y$ E como $\{\alpha\} \times X_\alpha$ é numa correspondência biunívoca com X, $(\alpha, x) \leftrightarrow x$, podemos agora formam a reunião $\bigcup_{\alpha \in A} \{\alpha\} \times X_\alpha$ que agora é disjunta e corresponde a nossa intuição de reunir disjuntamente.

Definição 7.11 *Dado uma família X_α, $\alpha \in A$ de conjuntos, a reunião $\bigcup_{\alpha \in A} \{\alpha\} \times X_\alpha$ chama-se* reunião disjunta *ou* coproduto *da família, e denota-se por $\coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$. As aplicações $i_\beta : X_\beta \to \coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$ definidas por $i_\beta(x) = (\beta, x)$ chamam-se* injeções canônicas.

A reunião disjunta denota-se também por $\bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha$ e as vezes por abuso de linguagem como uma reunião usual $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ deixando ao contexto explicitar o sentido correto da notação.

Agora sejam $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uma família de espaços topo1ógicos. Introduzimos uma topologia em $\coprod X_\alpha$ dizendo que uma base de vizinhanças de $(\beta, x) \in \coprod X_\alpha$ é dado por conjuntos de tipo $\{\beta\} \times V$ onde V pertence a uma base de vizinhanças de x em X_β Em outras palavras se nós esquecermos do índice β, todo ponto fica com sua base usual de vizinhanças, a presença dos outros componentes em $\coprod X_\alpha$ não modifica a topologia em cada X_α:

$\coprod_{i=1}^4 X_i \simeq$



Um aberto em $\coprod X_\alpha$ então e de forma $\coprod O_\alpha$ onde cada O_α é um aberto em X_α.

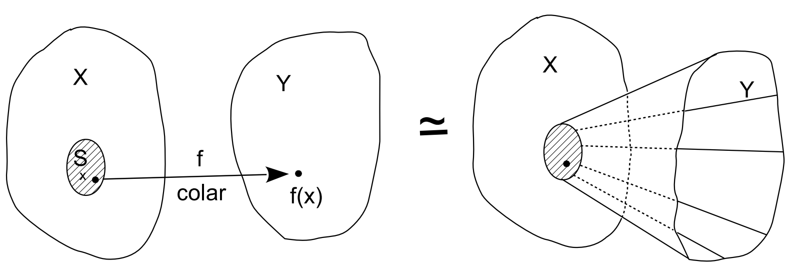
Definição 7.12 *O espaço $\coprod X_\alpha$ com a topologia acima construida chama-se* soma topológica *ou* coproduto *dos espaços topo1ógicos X_α; a topologia assim introduzida denota-se por $\coprod \mathcal{T}_\alpha$.*

Voltamos a nossa construção da esfera. Seja $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ um disco e considere agora $D \coprod D = \{1\} \times D \cup \{2\} \times D$ coproduto da familia X_1, X_2; onde $X_1 = D = X_2$. Introduza as equivalências $(1,(x,y)) \sim (2,(x,y))$ se $x^2 + y^2 = 1$, isto é, cole os pontos correspondentes dos perímetros. Tem-se $D \coprod D/{\sim} \simeq S^2$.

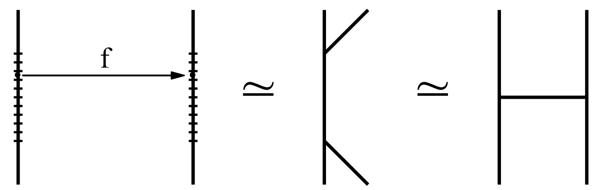
Então para colar uma família de espaços topo1ógicos $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ primeiro passe ao coproduto $\coprod X_\alpha$, identifique os pontos a serem colados e passa ao espaço quociente respeito a essas identificações.

A forma mais usada dessa construção é a seguinte.

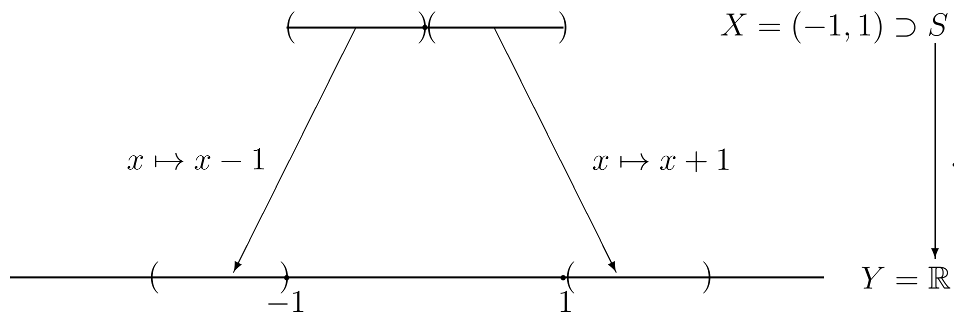
Dado $(X, \mathcal{T})$ espaço topológico, $S \subset X$ um subconjunto e $f : S \to Y$ aplicação para outro espaço topológico Y. O espaço $X \cup_f Y$ é definido como X colado a Y pela função f, isto é cole $x \in S$ e $f(x) \in Y$. Assim em $X \coprod Y$ identificamos $(1, x)$ com $(2, f(x))$, $x \in S$ e passamos ao espaço quociente.



Por exemplo seja D o nosso disco, $S \subset D$ a circunferência e seja $f : S \to D$ a inclusão então $D \cup_f D \simeq S^2$. Da mesma maneira seja $X = [0,1]$, $S = [1/4, 3/4]$ e $Y =]0,1]$ com $f : [1/4, 3/4] \to [0,1]$ sendo a inclusão $f(x) = x$. Então $X \cap_f Y$ é um espaço homeomorfo à letra "H".



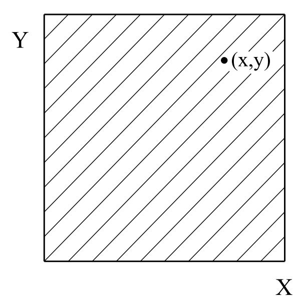
Finalmente o nosso espaço estranho $\mathbb{R} \cup \{\heartsuit\}$ pode ser visto como $(-1,1) \cup_f \mathbb{R}$ para um f particular. De fato seja $X = (-1,1)$, $S = (-1,0) \cup (0,1)$ e $Y = \mathbb{R}$. Defina f como no desenho e cole: $R \cup \{\heartsuit\} = (-1,1) \cup_f \mathbb{R}$.



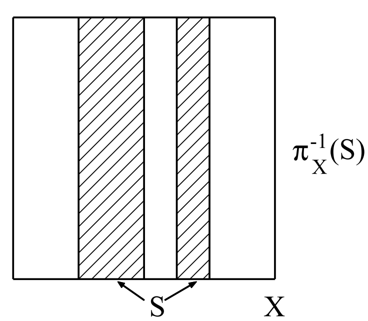
Capítulo 8

Espaços e topologias produto

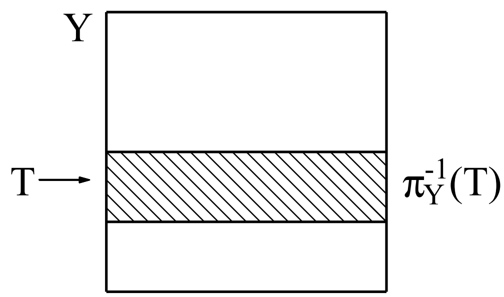
Considere primeiro o produto cartesiano de dois conjuntos $X \times Y$ desenhado assim:



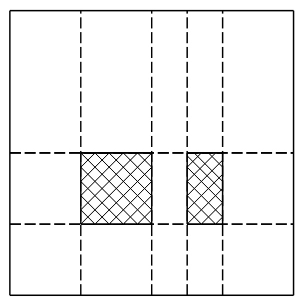
Isto é, como conjunto de pares (x, y). Temos duas projeções canonicas π_X, π_Y onde $\pi_X : X \times Y \to X$ é definido por $\pi_X(x, y) = x$ e $\pi_Y : X \times Y \to Y$ é definido por $\pi_Y(x, y) = y$, são projeções na primeira e segunda componente. Se $S \subset X$, $\pi_X^{-1}(S)$ seria desenhado como uma faixa vertical:



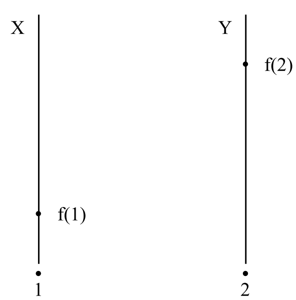
e se $T \subset Y$, $\pi_Y^{-1}(T)$ seria desenhado como uma faixa horizontal:



0 conjunto $\pi_X^{-1}(S) \cap \pi_Y^{-1}(T)$ teria o desenho:

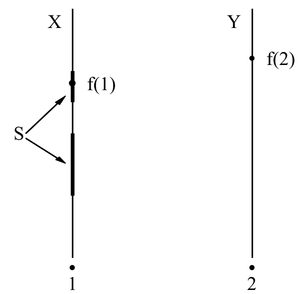


Agora pense em $X \times Y$ como sendo o conjunto de todas as aplicações $\{1, 2\} \to X \cup Y$ tais que $f(1) \in X$ e $f(2) \in Y$.

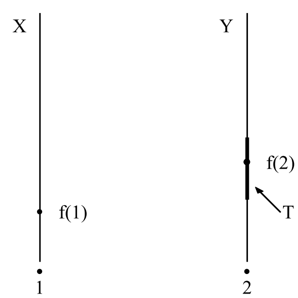


A correspondência entre os dois pontos de vista é $(x, y) \leftrightarrow f$ onde $f(1) = x$, $f(2) = y$.

Agora $\pi_X f = f(1)$, $\pi_Y f = f(2)$. O conjunto $\pi_X^{-1}(S)$ então consiste de

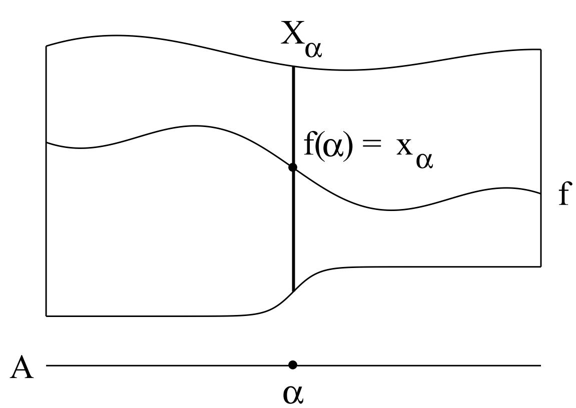


todas as aplicações f tais que $f(1) \in S$, em outras palavras são todas as aplicaç es tais que $f(1)$ passa pela janela S no conjunto X. Da mesma maneira $\pi_Y^{-1}(T)$ consiste de todas as aplicações que passam pela janela T em Y.



O conjunto $\pi_X^{-1}(S) \cap \pi_Y^{-1}(T)$ então corresponde a colocação de ambas as janelas.

Aplicamos a mesma idéia a uma família qualquer de conjuntos $X_\alpha, \alpha \in A$. Considere todas X_α.

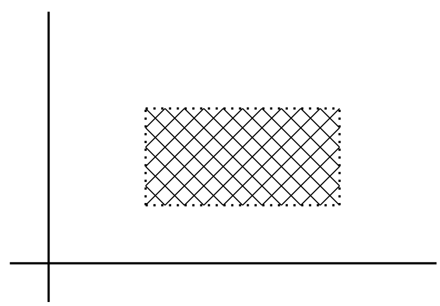


Em vez de escrever $f(\alpha)$ é usua] escrever x_α pensando na aplicação f como um ponto x com componentes $x_\alpha = f(\alpha)$, como uma família de pontos. Isto é a generalização da prática usual de pensar em $X_1 \times X_2$ corno um conjunto de pares (x_1, x_2) em vez de aplicações $f : \{1,2\} \to X_1 \cup X_2$ com $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$.

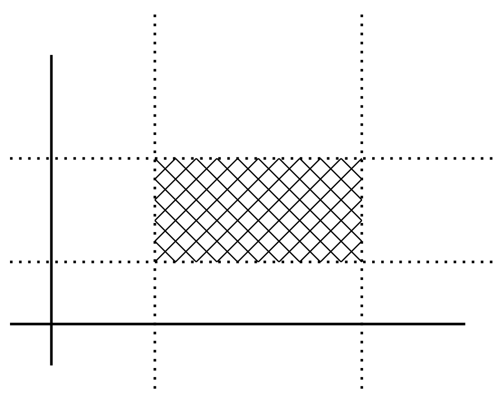
Definição 8.1 *O conjunto de todas as famílias x_α, $\alpha \in A$, $x_\alpha \in X_\alpha$ chama-se* produto *da família x_α, $\alpha \in A$ de conjuntos, e denota-se por $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. As aplicações $\pi_\beta : \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta$ definidas por $\pi_\beta(x) = x_\beta$ chamam-se* projeções canônicas*.*

O produto denota-se também por $\times_{\alpha\in A} X_\alpha$

Agora seja $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in A$ uma f'amília de espaços topológicos. Vamos introduzir uma topologia em $\prod X_\alpha$, a assim chamada *topologia produto.* Para motivar essa topologia considere $\mathbb{R}^2$. Em $\mathbb{R}^2$ uma base para a topologia usual é dada por retangulos



mas estes sao interseç [illegible] ontais:



isto é, da forma $\pi_1^{-1}(V_1) \cap \pi_2^{-1}(V_2)$ onde π_1 e π_2 São as duas projeções canônicas

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^2 \arrow[ddl, "\pi_1"'] \arrow[ddr, "\pi_2"] & \\
 & (x,y) \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\
\mathbb{R} & & \mathbb{R} \\
x & & y
\end{tikzcd}$$

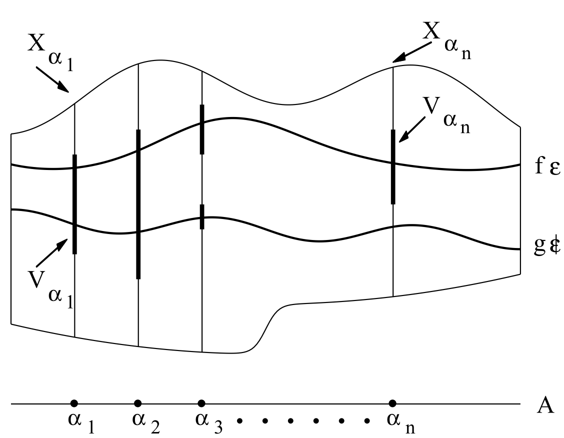
e V_1 e V_2 são abertos em $\mathbb{R}$. Em outras palavras os conjuntos do tipo $\pi_i^{-1}(V_i)$, $i = 1, 2$ e V_i aberto em $\mathbb{R}$ formam uma sub-base para a topologia usual.

Definição 8.2 *Seja* $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ *uma família de espaços topológicos e considere em* $\prod X_\alpha$ *a topologia gerada pelos conjuntos de tipo* $\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ *onde* $V_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$. *Esta topologia chama-se* topologia produto *e denota-se por* $\prod \mathcal{T}_\alpha$.

Um elemento da base de $\prod \mathcal{T}_\alpha$ seria da forma

$$B = \pi_{\alpha_1}^{-1}(V_{\alpha_1}) \cap \pi_{\alpha_2}^{-1}(V_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(V_{\alpha_n}).$$

Para entender esse conjunto lembremos que considerando $\prod X_\alpha$ como conjunto de aplicações, $\pi_\alpha^{-1}(S)$ corresponde à colocação de uma janela S em X_α. Então B corresponde exatamente ao conjunto de aplicações que passam pelas janelas $V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n}$ em $X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_n}$



Reconhcecmos aqui uma construção já feita (veja Exemplo 5.5). De fato $\mathbb{R}^X = \prod_X \mathbb{R}$ (produto de $\mathbb{R}$, X vezes) e a topologia fraca é de fato a topologia produto.

Teorema 8.1 *A topologia produto $\prod \mathcal{T}_\alpha$ é a topologia mais fraca que faz todas as projeções π_α contínuas.*

Demonstração: Qualquer topologia $\mathcal{T}$ que faz todas as π_α contínuas tem que conter os conjuntos $\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ onde $V_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$; então tem que conter a lopologia gerada por esses conjuntos mas esta é a topologia produto. $\diamondsuit$

Em outras palavras a lopologia produto é a topologia inicial respeito à família de aplicações π_α.

Teorema 8.2 (Propriedade universal) *Seja $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uma família de espaços topológicos e $(Z, \mathcal{T})$ um outro espaço topológico. Sejam $f_\alpha : Z \to X_\alpha$ uma família de aplicações contínuas. Defina a aplicação $f = \prod f_\alpha : Z \to \prod X_\alpha$. dada por $f(z) = (f_\alpha(z))$ isto é a a-ésima componente de f é $f_\alpha : f(z)_\alpha = f_\alpha(z)$. Conclusão: f é contínua.*

Demonstração: Basta mostrar que $f^{-1}(B)$ é aberto para todo elemento $B = \pi_{\alpha_1}^{-1}(V_{\alpha_1}) \cap \pi_{\alpha_2}^{-1}(V_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(V_{\alpha_n})$ da base da topologia produto. Mas $f^{-1}(B) = f_{\alpha_1}^{-1}(V_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap f_{\alpha_n}^{-1}(V_{\alpha_n})$ e este é aberto pois toda f_α é contínua. $\diamondsuit$

Para entender a aplicação f_α melhor considere o caso $A = \{1, 2\}$ $f_\alpha : Z \to \mathbb{R}$ então$f = \prod f_\alpha : Z \to \mathbb{R}^2$ é dado por $f(z) = (f_1(z), f_2(z))$. Consideramos duas funções f_1, f_2 para $\mathbb{R}$ como sendo componentes de uma só função para $\mathbb{R}^2$. Assim uma família de aplicações pode ser considerada como sendo componentes de uma só aplicação para o produto. Nessa passagem não perdemos conlinuidade e isto é conteúdo da propriedade universal.

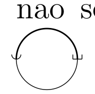
Corolário 8.1 *Uma aplicação $f : Z \to \prod X_\alpha$ de um espaço topológico para um produto com topologia produto é contínua se e somente e todas as sua componentes $\pi_\alpha \circ f : Z \to \prod X_\beta \to X_\alpha$ são contínuas.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Óbvio pois $\pi_\alpha \circ f$ é composiçã de funções contínuas.
($\Leftarrow$) Evidentemente $f = \prod \pi_\alpha \circ f$. Use a propriedade universal. $\diamondsuit$

As projeções canônicas π_α gozam de uma propriedade útil.

Definição 8.3 *Uma aplicação $f : X \to Y$ entre dois espaços topologicos chama-se* aberto *se ela leva abertos em abertos: $U \in \mathcal{T}_X \Rightarrow f(U) \in \mathcal{T}_y$*

Por exemplo todo homeomorfismo é aberto. Ser aberto nao implica ser contínuo; por exemplo $\mathcal{T}_Y$ pode ser discreta então todo f é aberto mas não necessariamente contínua. Uma aplicação contínua pode nao ser aberta: $f : [0,1] \to S^1$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$ é contínua mas leva $[0,1/2) \to$  que nao é aberto em S^1.

Teorema 8.3 *Na topologia produto toda aplicação π_α é aberta.*

Demonstração: Como $f(\cup S_\alpha) = \cup f(S_\alpha)$ para qualquer aplicação e família de conjuntos basta mostrar que $\pi_\gamma(B)$ é aberto para qualquer elemento $B = \pi_{\alpha_1}^{-1}(V_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(V_{\alpha_n})$ da base da topologia produto. Mas

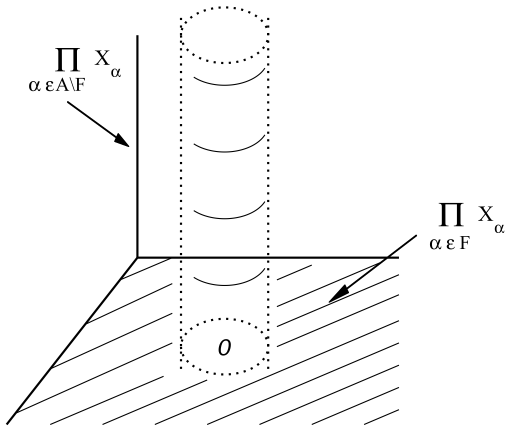
$$\pi_\gamma(B) = \begin{cases} X_\gamma & \gamma \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \\ V_{\alpha_i} & \gamma = \alpha_i \end{cases}$$

e estes sao abertos. $\diamondsuit$

Por mais simples que a fórmula acima possa aparerer ela esconde uma suposição. Para mostrar $\pi_\gamma(B) = X_\gamma$, $\gamma \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ escolhe um $x_\gamma \in X_\gamma$, escolhe $x_{\alpha_i} \in V_{\alpha_i}$ e escolhe $x_\beta \in X_\beta$ arbitrariamente para $\beta \neq \gamma$, $\beta \neq \alpha_i$. Então para essa família $x = (x_\beta)$ assim definido $\pi_\gamma(x) = x_\gamma$. Que todas essas escolhas são possíveis é o conteúdo do axioma de escolha. o axioma da escolha diz que se para todo α, $X_\alpha \neq \emptyset$, então $\prod_{\alpha\in a} X_\alpha \neq \emptyset$.

Para entender melhor os abertos em $\prod X_\alpha$ considere um conjunto finito $F \subset A$. Um elemento da hase $\cap_{\gamma\in F}\pi_\gamma^{-1}(V_\gamma)$ é também o conjunto $\prod_{\alpha\in F} V_\alpha \times \prod_{\alpha\in A\setminus F} X_\alpha$

Uma reunião de conjuntos deste tipo seria da forma $\mathcal{O} \times \prod_{\alpha\in A\setminus F} X_\alpha$ onde $\mathcal{O}$ é um aberto no produto finito $\prod_{\gamma\in F} X_\gamma$. Um conjunto deste tipo chama-se *cilindro* com base $\mathcal{O}$. Cilindros com bases abertas em subprodutos finitos formam assim uma base para a topologia produto, cada aberto contém um destes, e assim se $G \in \prod \mathcal{T}_\alpha$ então $\pi_\beta(G) = X_\beta$ para todo exceto um número finito de índices β.

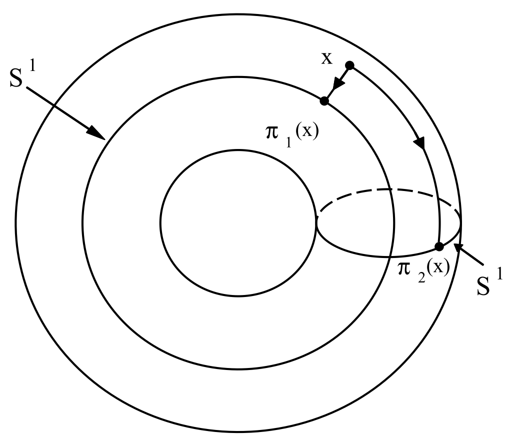


Um produto de abertos $\prod V_\alpha$ é um aberto então se e somente se $V_\alpha = X_\alpha$ para todos exceto um número finito de índices.

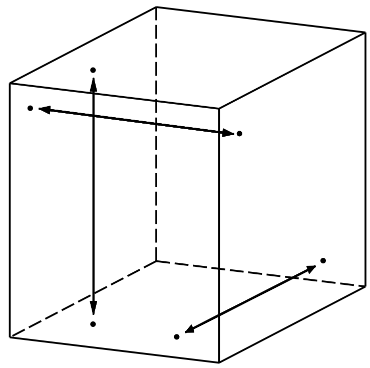
Exemplo 8.1 *Damos alguns exemplos de topologia produto:*

(a) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n = \prod_1^n \mathbb{R}$ *A topologia usual coincide com a topologia produto.*

(b) $S^1 \times S^1$ *é o toro* T^2



(c) $S^1 \times S^1 \times S^1$ *é o toro tri-dimensional* T^3*. Este espaço é obtido identificando pontos na superfície do cubo:*
$\{(x, y, z) \,|\, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$



Faça as identificações $(0, y, z) \sim (1, y, z)$, $(x, 0, z) \sim (x, 1, z)$, $(x, y, 0) \sim (x, y, 1)$.

As projeções $\pi_1, \pi_2, \pi_3 : T^3 \to S^1$ *são* $\pi_1(x, y, z) = x$, $\pi_2(x, y, z) = y$, $\pi_3(x, y, z) = z$ *onde na imagem identificamos* 0 *e* 1.

Capítulo 9

Convergências topológicas; Redes e Filtros

Já vimos topologias onde os conceitos da continuidade não são bem tratados por meio de convergência de sequências. Sempre temos a implicação f contínua $\Rightarrow (x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x))$ mas a volta é geralmente falsa e já demos contra-exemplos. Para estabelecer uma simetria entre os conceitos de continuidade e convergência precisamos ampliar o conceito de uma sequência.

Definição 9.1 *Seja A um conjunto parcialmente ordenado, dizemos que A é um conjunto* dirigido *ou* filtrado *ou* filtrante *se ele satisfaz: para todo $\alpha, \beta \in A$ existe um $\gamma \in A$ tal que $\gamma \geq \alpha$ e $\gamma \geq \beta$*

Exemplo 9.1

(a) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ *o conjunto de números naturais com a ordem natural.*

$n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow n + m \geq n, n + m \geq m$ *e* $n + m \in \mathbb{N}$

Qualquer subconjunto de $\mathbb{N}$*, como* $\{1, 2, \dots, k\}$ *é dirigido também.*

(b) $\mathcal{P}(X)$ *com a ordem da inclusio*

$A, B \in \mathcal{P}(X) \Rightarrow A \cup B \supset A, A \cup B \supset B$ *e* $A \cup B \in \mathcal{P}(X)$.

(c) *O conjunto de subconjuntos finitos F de um conjunto X. A ordem é a da inclusio.*

F_1, F_2 *finitos* $\Rightarrow F_1 \cup F_2$ *finito e* $F_1 \cup F_2 \supset F_1$, $F_1 \cup F_2 \supset F_2$

(d) *Seja* $(X, \mathcal{T})$ *um espaço topológico e* $x \in X$. *Seja* $\mathcal{V}_x$ *o sistema de vizinhanças de* x. *Introduzimos a ordem* $V \leq W$ *em* $\mathcal{V}_x$ *por* $V \leq W \Leftrightarrow W \subset V$. *A ordem aqui é* oposta *aquela da inclusão. Se* $V, W \in \mathcal{V}_x$ *então* $V \cap W \in \mathcal{V}_x$ *e* $V \cap W \geq V$, $V \cap W \geq W$.

(e) *A reta* $\mathbb{R}$ *com a ordem usual* $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| + |y| \geq x$, $|x| + |y| \geq y$ *e* $|x| + |y| \in \mathbb{R}$

(f) *Sejam* A *e* B *dois conjuntos dirigidos. Define a ordem em* $A \times B$ *por* $(\alpha, \beta) \geq (\alpha', \beta') \Leftrightarrow \alpha \geq \alpha'$ *e* $\beta \geq \beta'$. *Com esta ordem* $A \times B$ *é um conjunto dirigido. A mesma construção é vlida para um produto qualquer de conjuntos dirigidos.*

Observe que se A é um conjunto ordenado onde para qualquer par $\alpha, \beta \in A$, $\sup(\alpha, \beta)$ existe então A é dirigido, mas ser dirigido é mais fraco do que isto, pois só queremos que para todo par existe uma cota superior.

Definição 9.2 *Uma* rede *num conjunto* X *é uma aplicação* $f : A \to X$ *de um conjunto dirigido* A *para* X. *Em vez de escrever* $f(\alpha)$ *escrevemos* x_α *mas não confunda essa família* $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ *com um elemento de* $\prod X_\alpha$ *embora que se possa identificá-las assim; aqui perseguimos outra idéia.*

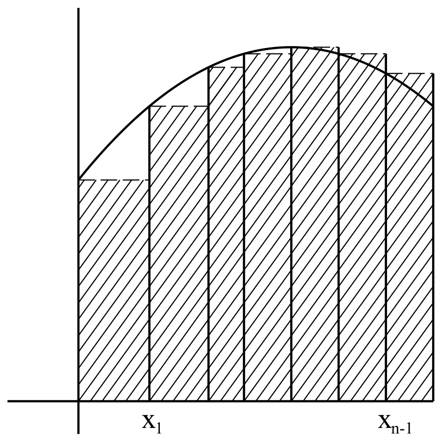
No caso de $A = \mathbb{N}$ uma rede então é uma sequência x_n em X. Redes generalizam sequências.

Definição 9.3 *Se* A *é um conjunto dirigido e* P_α *é uma ramília de propriedades dizemos que* eventualmente P_α *se existe um* $\alpha_0 \in A$ *tal que para* $\alpha \geq \alpha_0$, P_α *é verdadeiro. Isto é a partir e um certo elemento* $\alpha_0 \in A$ *a propriedade* P_α *é verdadeiro. Dizemoh que* frequentemente P_α *se dado um* $\beta \in A$ *qualquer existe um* $\gamma \geq \beta$ *tal que* P_α *é verdadeiro. Isto é depois de qualquer elemento existe um elemento para o qual* P_α *é verdadeiro.*

Definição 9.4 *Seja* $(X, \mathcal{T})$ *um espaço topológico e* x_α *uma rede em* X. *Dizemos que* x_α converge *para* $x \in X$ *e escrevemos* $x_\alpha \to x$ *se eventualmente* x_α *entra qualquer vizinhaça de* x. *Isto é dada uma vizinhança* V *qualquer, eventualmente* $x_\alpha \in F$. *Escreva-se* $x = \lim_{\alpha \in A} x_\alpha$.

Se $A = \mathbb{N}$ isso reproduz a noçao de uma sequência convergente. Damos outros exemplos

Exemplo 9.2 *Seja $f : 0,1] \to \mathbb{R}$ uma funçio contínua. A integral de Riemann $\int_0^1 f(x)\,dx$ é definido como limite de somas de Riemann $S_F(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$ onde $F = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ é uma partição de $[0,1]$.*



Na definição usual escolhemos uma sequência F_k de partições tais que $\mu(F_k) = \max|x_{i+1} - x_i| \to 0$ e definimos $\int_0^1 f(x)\,dx$ como sendo $\lim S_{F_k}(f)$. Note agora que as partições formam um conjunto dirigido pela ordem da inclusão. Dado um $\epsilon > 0$ existe uma partição F_0 tal que $\mu(F_0) < \epsilon$, então para $G \supset F_0$, $\mu(G) < \epsilon$ vemos que como rede *de* números *$\mu(F) \to 0$. Disto segue que também como rede de números $S_F(f) \to \int_0^1 f(x)\,dx$. Podemos então definir a integral de Riemann por $\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_F S_F(f)$ sem se preocupar com os números $\mu(F)$.*

Para entender melhor as idéias que entram no conceito de uma rede mostraremodsprimeiro o seguinte teorema.

Teorema 9.1 *Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é Hausdordd se e somente se $x_\alpha \to x$, $x_\alpha \to y \Rightarrow\; x = y$. Em outras palavras um espaço é Hausdorff se e somente se o limite de uma rede, quando existir, é único.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha $(X, \mathcal{T})$ Hausdorll e $x_\alpha \to x$ e $x_\alpha \to y$ mas $x \neq y$. Existem duas vizinhanças V_x e V_y de x e y respectivamente tais que $V_x \cap V_y = \emptyset$. Por definição da convergência existem índices α_0, α_1 tais que $\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in V_x$

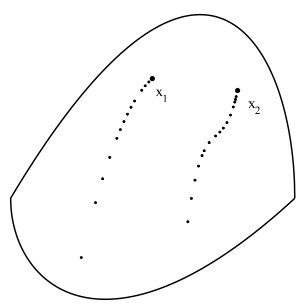
e $\alpha \geq \alpha_1 \Rightarrow x_\alpha \in V_y$ mas como A é dirigido existe $\beta \geq \alpha_0$, $\beta \geq \alpha_1$, então $x_\beta \in V_x$, $x_\beta \in V_y$ ou seja $x_\beta \in V_x \cap V_y = \emptyset$ que é imposível.

($\Leftarrow$) Suponha agora que os limites de redes são únicos quando existirem. Sejam $x, y \in X$, $x \neq y$ e suponha que toda vizinhança V de x tem interseção não vazia com toda vizinhança W de y: $V \cap W \neq \emptyset$ Seja $x_{V,W} \in V \cap W$. Agora $x_{V,W}$ tem como conjunto de índices $V_x \times V_y$ que é dirigido por força do Exemplo 9.1 (d) e (f). Mas $x_{V,W} \to x$ e $x_{V,W} \to y$, uma contradição. $\diamondsuit$

Isso talvez seja a melhor motivação para espaços Hausdorff: é o contexto topológico mais natural para estudo de convergencia.

Já vimos exemplos em espaços não Hausdorff de convergência a pontos distintos. Eis um outro exemplo. Seja $X = \{1.2\}\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1\}\}$ o espaço de Sierpinski. Agora qualquer conjunto com um ponto só $A = \{\star\}$ é dirigido (a ordem é $\star \leq \star$). Então podemos considerar $1 \in X$ como $x_\star = 1$, isto é uma rede. Pontos sozinhos então são redes. Em nosso espaço então tém-se $1 \to 2$, mas $2 \not\to 1$. Naturalmente $1 \to 1$ e $2 \to 2$. Agora por definição da convergência $x \to y \Leftrightarrow y \in \overline{\{x\}}$ (fecho do conjunto $\{x\}$. Como um espaço é $\mathrm{T}_1 \Leftrightarrow \overline{\{x\}} = \{x\}$ para todo x vemos que um espaço é $\mathrm{T}_1 \Leftrightarrow x \to y \Rightarrow x = y$. Em espaços T_1 então pontos não podem convergir para outros pontos. O espaço de Sierpinski então náo é T_1

Notemos como o teorema acima usa a propriedade definitiva de um conjunto dirigido ($\alpha, \beta \in A \Rightarrow \exists \gamma \in A, \gamma \geq \alpha, \gamma \geq \beta$). Com um conjunto ordenado sem essa propriedade mesmo num espaço Hausdorff o teorema não seria verdade. Por exemplo se $A = \mathbb{N} \coprod \mathbb{N}$ (duas cópias de $\mathbb{N}$) onde em toda cópia a ordem é usual e as duas cópias são incomparáveis, temos sempre a possibilidade de definir duas sequências $x_{(1,n)}$, $x_{(2,m)}$ que convergem a dois pontos distintos



$x_{(1,n)} \to x_1$, $x_{(2,m)} \to x_2$. Então A corresponde a dois sistemas de convergência agindo independentemente. A propriedade de ser dirigido então significa que trabalhamos com um sistema só que não pode ser decomposto em partes incomparáveis.

Mostraremos agora um teorema que estabelece a simetria requerida entre continuidade e convergência.

Teorema 9.2 *Uma aplicação $f : X \to Y$ entre dois espaços topológicos é contínua em $x_0 \in X \Leftrightarrow$ para toda rede $x_\alpha \to x_0$ tem-se $f(x_\alpha) \to f(x_0)$*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Modificação fácil da demonstração do Teorema 3.7

($\Leftarrow$) Suponha que $x_\alpha \to x_0 \Rightarrow f(x_\alpha) \to f(x_0)$ mas f não é contínua em x_0. Então existe uma vizinhança V de $f(x_0)$ tal que $f^{-1}(V)$ não é uma vizinhança de x_0. Então para toda vizinhança W de x_0 $W \setminus f^{-1}(V) \neq \emptyset$. Seja $x_W \in W \setminus f^{-1}(V)$ e então $\{x_W\}$ é uma rede e $x_W \to x_0$ mas $f(x_W) \notin V$ e então $f(x_W) \not\to f(x_0)$, uma contradição. $\diamondsuit$

Com redes podemos também afirmar uma forma simétrica do Teorema 3.11.

Teorema 9.3 *Seja $S \subset X$ um subconjunto de um espaço topológico, então $x \in \bar{S} \Leftrightarrow$ existe uma rede $s_\alpha \to x$ em X.*

Demonstração:

($\Leftarrow$) Suponha que $x \in S$, então para toda vizinhança V de x tem-se $V \cap S \neq \emptyset$, seja $s_V \in V \cap S$, logo $s_V \in S$ e $s_V \to x$.

($\Rightarrow$) Suponha que $s_\alpha \to x$ então se V é uma vizinhança de x eventualmente $S_\alpha \in V$ e como $s_\alpha \in S$ tem-se $V \cap S \neq \emptyset$ logo $x \in \bar{S}$. $\diamondsuit$

Introduzimos agora certos conceitos úteis no estudo de convergeência embora que neste livro não usaremos muito deles.

Definição 9.5 *Seja x_α uma rede num espaço topo1ógico $(X, \mathcal{T})$. Dizemos que $x \in X$ é um* ponto de acumulação *de $x_\alpha \Leftrightarrow$ para toda vizinhança V de x,* frequentemente *$x_\alpha \in V$.*

Assim a rede pode sair da vizinhança, mas se sair, sempre volta nela para um índice maior.

Definição 9.6 *Um subconjunto $C \subset A$ de um conjunto parcialmente ordenado chama-se* cofinal *se para qualquer $\alpha \in A$ existe um $\gamma \in C$ tal que $\gamma \geq \alpha$.*

Um conjunto cofinal de um conjunto dirgido é sempre dirigido pois dado $\gamma_1, \gamma_2 \in C$, $\exists\, \alpha \in A, \alpha \geq \gamma_1, \alpha \geq \gamma_2$ mas então existe um $\gamma \in C$, $\gamma \geq \alpha$ e logo $\gamma \geq \gamma_1, \gamma \geq \gamma_2$. Dado uma rede $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ podemos então considerar a rede $(x_\gamma)_{\gamma\in C}$. Evidentemente se $\lim_{\alpha\in A} x_\alpha = x$ então $\lim_{\gamma\in C} x_\gamma = x$.

Generalizamos um pouco o conceito de subconjunto cofinal.

Definição 9.7 *Sejam A e B dois conjuntos parcialmente ordenados e $\phi : B \to A$ uma aplicação. Dizemos que ϕ é* cofinal *se se para todo $\alpha \in A$ existe um $\beta_0 \in B$ tal que $\beta \geq \beta_0 \Rightarrow \phi(\beta) \geq \alpha$.*

Vemos que $C \subset A$ é cofinal se e ,somente se a inclusão $i : C \to A$ é cofinal.

Note que no caso A e B serem dirigidos, $\phi : B \to A$ é cofinal se e somente se $\phi(\beta)$ eventualmente ultrapassa qualquer $\alpha \in A$.

Definição 9.8 *Seja $x_\alpha, \alpha \in A$ uma rede em X, uma* subrede *de x_α é uma rede $\beta \to x_{\phi(\beta)}$ onde $\phi : B \to A$ é uma aplicação cofinal (e B é dirigido).*

Uma snbsequência de uma sequência então é uma subrede mas não o contrário. A primeira diferença é que umna subrede não precisa ser crescente, somente que ela eventualmente ultrapassa. Por exemplo $x_2, x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, x_8, x_7, \ldots$ é uma subrede da sequência $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \ldots$ (dada pela aplicação $\phi(1) = 2$, $\phi(2) = 1$, $\phi(3) = 4$, $\phi(4) = 3$, etc. $\ldots$). Mas além disto uma subrede de uma sequência pode ser um conjunto de índices muito mais complicado que $\mathbb{N}$. Assim veremos que existem sequências tais que nenhuma subsequência converge mas que tem subredes convergentes.

Teorema 9.4 *Seja x_α uma rede em $(X, \mathcal{T})$, se $x_\alpha \to x$ então para toda subrede tem-se $x_{\phi(\beta)} \to x$.*

Demonstração: Seja V uma vizinhança de x então $\exists\, \alpha_0 \in A$ tal que $\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in V$ mas eventualmente $\phi(\beta) \geq \alpha_0$ então eventualmente $x_{\phi(\beta)} \in V$ logo $x_{\phi(\beta)} \to x$. $\diamondsuit$

Teorema 9.5 *Um ponto x em $(X, \mathcal{T})$ é um ponto de acumulação de uma rede $x_\alpha \Leftrightarrow$ existe uma subrede $x_{\phi(\beta)}$ tal que $x_{\phi(\beta)} \to x$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja $B = A \times \mathcal{V}_x$ onde $\mathcal{V}_x$ é o sistema de vizinhanças de x e defina $\phi : B \to A$ por $\phi(\alpha, V) =$ qualquer índice $\gamma \geq \alpha$ tal que $x_\gamma \in V$ Este existe pois $x_\alpha \in V$ frequentemente. Isto define uma subrede $x_{\phi(\alpha,V)}$ de x_α e evidentemente $x_{\phi(\alpha,V)} \to x$.

($\Leftarrow$)Suponha que $x_{\phi(\beta)} \to x$ para uma subrede. Dado uma vizinhança V de x e um índice $\alpha_0 \in A$ existe um β_0 tal que $\beta \geq \beta_0 \Rightarrow x_{\phi(\beta)} \in V$ (pois $x_{\phi(\beta)} \to x$) e um β_1 tal que $\beta \geq \beta_1 \Rightarrow \phi(\beta) \geq \alpha_0$ (pois ϕ é cofinal). Seja $\beta_\star \in B$, $\beta_\star \geq \beta_0, \beta_1$, então $\alpha_\star = \phi(\beta_\star)$ satisfaz $\alpha_\star \geq \alpha_0$ e $x_{\alpha_\star} \in V$ logo frequentemente $X_\alpha \in V$ e x é um ponto de acumulação. $\diamondsuit$

Nós trabaihamos com rédes com a mesma intuição que com sequências. Pense em movimento, pontos passeando em X. A única possível fonte de erro de intuição é a seguinte: Numa sequência o número de pontos fora de uma cauda $\{x_n \,|\, n \geq n_0\}$ é finito, numa rede o conjunto complemento a $\{x_\alpha \,|\, \alpha \geq \alpha_0\}$ não é finito em geral. Isto dá lugar a certo comportamento, a primeira vista, estranho das redes. Por exemplo em $\mathbb{R}$ toda sequência x_n tal que $x_n \to 0$ é limitada: $x_n \in B_r(0)$ para algum r pois eventualmente $(n \geq n_0)$, $x_n \in B_1(0)$ então escolhe $r > 1 + \max\{|x_k| \,|\, k = 1, 2, \ldots, n_0\}$ Para redes isto não é verdade. Seja $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0$ sistema de vizinhanças de $0 \in \mathbb{R}$; defina uma rede $x_V, V \in \mathcal{V}$ por $x_V = \begin{cases} \sup V \text{ se este } < \infty \\ 1 \text{ ao contrário} \end{cases}$ então $X_V \to 0$ mas por exemplo $x_{B_r} = r$ e então o conjunto $\{x_V \,|\, V \in \mathcal{V}\} = (0, \infty)$ não é limitado.

Existe um outro modo de tratar convergência, usando os assim chamados filtros. Primeiro considere a seguinte visão das redes. Seja $x_\alpha \to x$, imagine uma empresa que manufatura x, mas como não temos controle perfeito ela só pode manufaturar aproximções até um certo grau. A empresa tem um exército A de inspetores; se um elemento passa todos os testes do inspetor α ele coloca um rótulo no elemento e tem-se x_α. Para todo par α, β de inspetores tem mais um, ainda mais exigente, $\gamma \geq \alpha, \gamma \geq \beta$ que pelo menos faz todos os testes que ambos os α e β fazem. Ele passa somente ao elemento que tem toda a perfeição do α e do β juntos. Considere, agora, em vez de um x_α todos os elementos que o nosso inspetor imaginário α passa. Assim chegamos ao conceito dum filtro.

Definição 9.9 *Um* filtro $\mathfrak{F}$ *num conjunto* X x *é um conjunto de subconjuntos* ($\mathfrak{F} \subset \mathcal{P}(X)$) *de* X *que satisfaz*

(a) $\emptyset \notin \mathfrak{F}$

(b) $F_1, F_2 \in \mathfrak{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$

(c) $F \in \mathfrak{F}$ e $G \supset F \Rightarrow G \in \mathfrak{F}$

Note que isso é muito semelhante às propriedades do sistema de vizinhanças de um ponto num espaço topológico, de fato

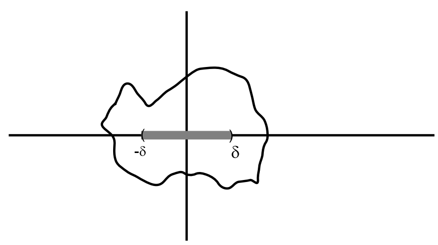
Exemplo 9.3

(a) *Seja X um espaço topológico e $\mathfrak{F} = \mathcal{V}_x$ o sistema de vizinhanças de x.*

(b) *Seja X um conjunto infinito e $\mathfrak{F}$ a família de complementos de subconjuntos finitos.*

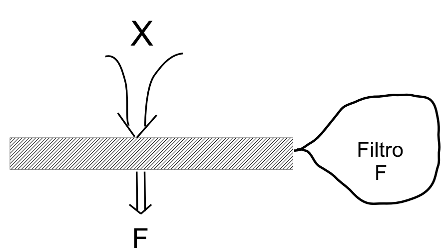
(c) *Seja $x \in X$ e seja $\mathfrak{F}$ a família de todos os conjuntos $S \subset X$ tais que $x \in S$. Isto chama-se* ultrafiltro,*(a ser definido depois)* principal *de x.*

(d) *Considere $0 \in \mathbb{R}^2$ e $\mathfrak{F}$ a família de conjuntos que contém o intervalo $(-\delta, \delta) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ para algum δ.*

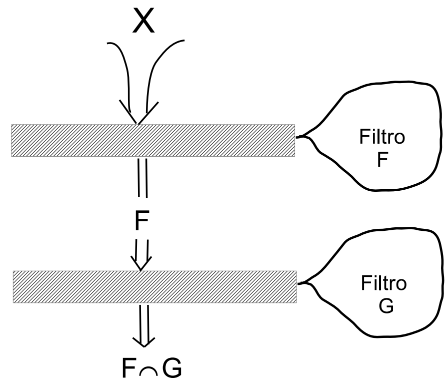


(e) *Seja X um espaço topológico, $S \subset X$ e $x \in \bar{S}$, $x \notin S$. Seja $\mathfrak{F}$ a família de conjuntos de tipo $V \cap S$ onde V é uma vizinhança de x.*

Para entender isso pense em todo elemento $F \in \mathfrak{F}$ como um filtro tal que jogando todos os pontos de X nele os que passam são precisamente os elementos de F.



Assim concatenando dois tais temos



Isso dá sentido à propriedade (b). A propriedade (c) é introduzida para simplificações posteriores, não é essencial.

Isto liga-se à visio dos inspetores, pense em F como sendo todos os elementos que um dado inspetor passa. Isto faz sentido pois um filtro é um conjunto dirigido onde a ordem é a oposta a incusio $F \geq G \Leftrightarrow F \subset G$.

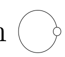
Definimos agora convergência de filtros.

Definição 9.10 *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico, $x \in X$ e $\mathfrak{F}$ um filtro em X. Dizemos que $\mathfrak{F}$* converge para *x e escrevemos $\mathfrak{F} \to x$ ou $\lim \mathfrak{F} = x$ se e só se $\mathfrak{F} \supset \mathcal{V}_x$.*

Pense nisso como um jogo. Eu estou no espaço X mas tenho só poderes topológicos, isto é para qualquer ponto x só posso construir uma vizinhança dele. O filtro vem de fora, é o poder dum outro jogador de explicitar subconjuntos de X Eu suspeito que $\mathfrak{F}$ está procurando x, no meu entendimento isso significaria que dada qualquer vizinhança de x (o que é o máximo que eu posso fazer em me aproximar de x) eventualmente o outro jogador está dentro dessa vizinhança. Assim eu diria $\mathfrak{F}$ está procurando x. Mas se dado V vizinhança de x, tem-se que para algum $F \in \mathfrak{F}$, $F \supset \mathcal{V}_x$ então pela propriedade (c) $V \in \mathfrak{F}$ ou em outras palavras $\mathfrak{F} \supset \mathcal{V}_x$ pois V é arbitrário. Isto é o conteúdo intuitivo da convergência de um filtro. Assim a propriedade (c) é intróduzida para dar uma forma simples para a definição de convergência.

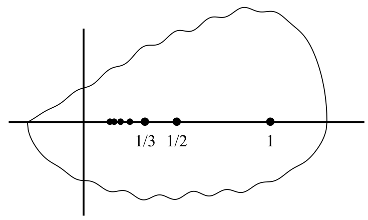
É importante reparar que o jogador $\mathfrak{F}$ pode ter poderes superiores aos meus, por exemplo, no Exemplo 9.3 (d), $\mathfrak{F}$ contém intervalos do tipo $(-\epsilon, \epsilon) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ o que é muito mais do que eu posso fazer em me aproximar a 0, eu só posso construir algo que contém uma bola . Neste caso evidentemente $\mathfrak{F} \to 0$ mas quem está usando $\mathfrak{F}$ é muito mais eficiente em se aproximar a 0 do que um morador topológico em $\mathbb{R}^2$. Como naturalmente filtros aparecem vindo de fora isto é a situação usual.

Um filtro pode nio convergir, por exemplo no Exemplo 9.3 (b) $\mathfrak{F}$ nao converge com topologias mais finas que a dos complementos de conjuntos finitos, no Exemplo 9.3 (e), $\mathfrak{F}$ não converge em S.

Neste último caso um filtro parece um sistema de aproximações mas não determina um ponto em S pois não há uma comparação suficientemente boa entre ele e o sistema topológico para pegar um elemento do espaço. É um sistema de aproximações que não converge. O exemplo sugere que filtros não convergentes nestes casos podem corresponder a pontos de um fecho ideal do espaço. Veremos depois do estudo da compacidade que num certo sentido isto é verdade. Um filtro assim encarado seria uma tentativa de pular lora do espaço e colocar-se num-ponto ideal. Se olharmos para o intervalo $(0, 1)$ como subconjunto de $\mathbb{R}$ a nossa intuiçio tenta de completar este com pontos 0 e 1. e chegar ao $[0, 1]$. Mas isto é parcialmente um fato do mergulho, pois num mergulho de tipo $x \mapsto e^{2\pi i x}$que dá a imagem  de um círculo furado a intuição só quer completar com o ponto 1, e dado um homeomorfismo $(0, 1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan \pi \left(x - \frac{1}{2}\right)$ a intuição completa $\mathbb{R}$ com os pontos ideais $-\infty, \infty$ mas agora com certa dificuldade. Será que o espaço $(0, 1)$ agora despido de todos os fatos e condições de megulho está querendo ser completado por um conjunto de pontos ideais que não percebemos por causa de sempre pensarmos neste espaço como mergulhado num outro, e se isso for verdade será que existem mergulhos onde estes pontos ideais aão tão explícitos como o 0 e 1 em $\mathbb{R}$ acima? Os filtros darão respostas positivas a essas idéias pois as vizinhanças destes pontos ideais deixam um filtro no espaço $(0, 1)$.

Definição 9.11 *Um ponto x num espaço topológ1co chama-se um* ponto de acumulação *de um filtro $\mathfrak{F} \Leftrightarrow x \in \bar{F}$ para todo $F \in \mathfrak{F}$. Em outras palavras $x \in \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} \bar{F}$*

Por exemplo em $\mathbb{R}^2$ seja $\mathfrak{F}$ a família dos conjuntos que contém os pontos $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots,$



Os pontos de acumulação de $\mathfrak{F}$ são primeiro evidentemente os pontos $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ mas também a origem $(0,0)$ Em termos do jogo, se x é um ponto de acumulação de $\mathfrak{F}$ e V é uma vizinhança de x qualquer, embora que $\mathfrak{F}$ possa nunca entrar inteiramente em V, ele sempre tem pontos dentro e dá a impressão de pelo menos parcialmente procurar x.

A relação entre redes e filtros é dada pelo seguinte dicionário de tradução:

Definição 9.12

(a) *Seja $\mathfrak{F}$ um filtro, uma* rede associada *a $\mathfrak{F}$ é qualquer rede x_F onde $x_F \in F$. O filtro mesmo é usado como conjunto de índices.*

(b) *Seja x_α uma rede o* filtro!associado *a ela é feito de todos os conjuntos que contém conjuntos do tipo $\{x_\alpha \mid \alpha \geq \alpha_0\}$*

Com o emprego deste dicionário podemos transformar qualquer argumento sobre redes num equivalente sobre filtros e vice-versa. No que segue adotaremos em cada instante o ponto de vista mais conveniente dos dois, deixando para o leitor a formulaçio do outro ponto de vista,

Definição 9.13 *Seja $\mathfrak{F}$ um filtro, uma* base $\mathfrak{B}$ *para $\mathfrak{F}$ é um subconjunto de $\mathfrak{F}$,$\mathfrak{B} \subset \mathfrak{F}$ tal que. para todo $F \in \mathfrak{F}$ existe um $B \in \mathfrak{B}$ tal que $F \supset B$. Dizemos que $\mathfrak{F}$ é o* filtro gerado por $\mathfrak{B}$.

Em termos do Exemplo 9.3 uma base para (a) seria uma base usual de vizinhanças, uma base para (c) seria o conjunto $\{\{x\}\}$ (isto é $\{x\}$ é o único elemento da base), uma base para (d) seria $\{(-\delta, \delta) \times \{0\} \mid 0 < \delta \leq 1\}$ o sistema de intervalos $(-\delta, \delta) \times \{0\}$ para $0 < \delta \leq 1$. Uma base para o filtro que correponde ao ponto ideal $+\infty$ da reta $\mathbb{R}$ seria o conjunto de intervalos semi-infinitos (r, ∞), $r \in \mathbb{R}$ ou $r \geq r_0$ digamos.

Teorema 9.6 *Um conjunto $\mathfrak{B}$ de subconjuntos de X é uma base para um filtro $\mathfrak{F}$ se e somente se $\mathfrak{B}$ satisfaz*

(a) $\emptyset \notin \mathfrak{B}$

(b) $B_1, B_2 \in \mathfrak{B} \Rightarrow \exists\, B_3 \in \mathfrak{B}$ *tal que* $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

O filtro gerado por essa base é $\mathfrak{F} = \{F \,|\, F \supset B$ *para algum* $B \in \mathfrak{B}\}$.

Deixamos a demonstraçio ao leitor.

Note que uma base satisfaz as propriedades (a) e uma versão fraca de (b) dos filtros. Isto é o que é essencial na idéia de filtro. Geralmente trabalhamos com bases.

Teorema 9.7 *Seja* $f : X \to Y$ *uma aplicação entre conjuntos, e seja* $\mathfrak{F}$ *um filtro em* X*. Então o sistema* $\{f(F) \,|\, F \in \mathfrak{F}\}$ *de subconjuntos de* Y *é uma base de um filtro em* Y*.*

Demonstração: Refira-se ao Teorema 9.6.

(a) Como $\emptyset \notin \mathfrak{F}$, $f(F) \neq \emptyset$ para todo F.

(b) $f(F_1 \cap F_2) \subset f(F_1) \cap f(F_2)$

$\diamondsuit$

O filtro assim gerado denota-se, por abuso de redação por $f(\mathfrak{F})$.

O conjunto de todos os f'iltros em X é parcialmente ordenado onde se define-se $\mathfrak{F}_1 \leq \mathfrak{F}_1 \Leftrightarrow \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$. A ordem é a da inclusão

Teorema 9.8 *Todo filtro é dominado por um filtro maximal.*

A demonstração disto é consequência do axioma da escolha que usamos numa forma equivalente.

Definição 9.14 *Um conjunto parcialmente ordenado* $(P, \leq)$ *chama-se* cadeia *ou conjunto* totalmente ordenado *se e somente se todo par de elementos é comparável, isto é,* $x, y \in P \Rightarrow x \leq y$ *ou* $y \leq x$*.*

Lema de Zorn - Se num conjunto parcialmente ordenado todo subconjunto totalmente ordenado tem uma cota superior, então todo elemento é dominado por um elemento maximal. O Lema de Zorn é equivalente ao axioma da escolha e será assumida como verdadeiro neste livro.

Demonstração do Teorema 9.8: Seja C uma cadeia de filtro então $\bigcup_{\mathfrak{F} \in C} \mathfrak{F}$ é um filtro e uma cota superior a C. $\square$

Definição 9.15 *Um filtro maximal chama-se* ultrafiltro.

Exemplo 9.4 *O ultrafiltro principal $\mathfrak{F}_x$ de $x \in X$ é um ultrafiltro (veja Exemplo 9.3)(c), pois $\{x\} \in \mathfrak{F}$ e se $S \notin \mathfrak{F}_x$ então $x \notin S$ logo $\{x\} \cap S = \emptyset$ e assim S não pode pertencer a um filtro maior que $\mathfrak{F}_x$.*

Num conjunto infinito existem ultrafiltros não principais. De fato considere o filtro de complementos de subconjuntos finitos, esse filtro é dominado por um ultrafiltro que não pode ser principal pois contém o complemento de qualquer ponto mas $\mathfrak{F}_x$ nao contém o complemento de $\{x\}$.

Esses ultrafiltros não principais nao podem ser exibidos. Isto é parte do folclore matemático mas tem conteudo preciso uma vez que se introduz uma linguagem inteiramente formalizada para a teoria de conjuntos. Mostra-se que essa linguagem é incapaz de exibir um ultrafiltro não principal. O axioma de escolha então, por mais inocente que aparecer, nos obriga a aceitar a existência de objetos que não podem ser exibidos. Por esta razão muitos matematicos não gostam do exioma e seu emprego é frquentemente considerdo uma infelicidade.

Teorema 9.9 *Um filtro $\mathfrak{F}$ em X é um ultrafiltro se e somente se para todo $S \subset X$* ou *$S \in \mathfrak{F}$* ou *$S^c \in \mathfrak{F}$. Um ultrafiltro então sempre escolhe entre um subconjunto e seu complemento.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja $\mathfrak{F}$ um ultrafiltro e $S \subset X$. Têm-se duas possibilidades: (1) ou $F \cap S \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathfrak{F}$ ou (2) existe um $F \in \mathfrak{F}$ tal que $F \cap S = \emptyset$. No primeiro caso $\mathfrak{F} \cup \{S\} \cup \{S \cap F \,|\, F \in \mathfrak{F}\}$ é base de um f'iltro e como este nao pode ser maior que $\mathfrak{F}$ tem-se $S \in \mathfrak{F}$. No segundo caso tem-se $F = (F \cap S) \cup (F \cap S^c) = F \cap S^c \subset S^c$ e como $F \in \mathfrak{F}$, $S^c \in \mathfrak{F}$ pela propriedade (c) de filtros.

($\Leftarrow$) Segue do teorema seguinte. $\diamondsuit$

Teorema 9.10 *Se $\mathfrak{B}$ é base de um filtro e se para todo $S \subset X$ ou $S \in \mathfrak{B}$ ou $S^c \in \mathfrak{B}$ então $\mathfrak{B}$ já é um ultrafiltro.*

Demonstração: Dado um $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}$ filtro, e dado um $S \in \mathfrak{F}$, $S \notin \mathcal{B}$ tem-se $S^c \in \mathfrak{B}$ mas então $S^c \in \mathfrak{F}$ e $S \cap S^c = \emptyset \in \mathfrak{F}$ uma contradição. $\diamondsuit$

Teorema 9.11 *Se $f : X \to Y$ é uma aplicação sobrejetorac de conjuntos e se $\mathfrak{F}$ é um ultrafiltro em X então o sistema de conjuntos $\{f(F) \mid F \in \mathfrak{F}\}$ é um ultrafiltro em Y.*

Demonstração: Já sabemos que este sistema é base de um f'iltro. Pela proposição precedente basta mostrar que ele escolhe entre conjuntos e seus complementos. Seja $S \subset Y$, como f é sobrejetora têm-se $S = f(f^{-1}(S))$, $S^c = f(f^{-1}(S^c)) = f((f^{-1}(S))^c)$. Como $\mathfrak{F}$ é um ultrafiltro tem-se ou $f^{-1}(S) \in \mathfrak{F}$ ou $f^{-1}(S^c) \in \mathfrak{F}$ logo ou S ou S^c pertence ao nosso sistema. $\diamondsuit$

Teorema 9.12 *Seja $\mathfrak{F}$ um ultrafiltro num espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, Se x é um ponto de acumulação de $\mathfrak{F}$ então $\mathfrak{F} \to x$.*

Demonstração: Seja V uma vizinhança de x, como $\mathfrak{F}$ é um ultrafiltro ou $V \in \mathfrak{F}$ ou $V^c \in \mathfrak{F}$. Mas como x é um ponto de acumulação é impossível que $V^c \in \mathfrak{F}$ pois $x \notin \overline{V^c}$ (a vizinhança V de x não tem pontos em comum com V^c). Então $V \in \mathfrak{F}$ e como V é arbitrário $\mathcal{V}_x \subset \mathfrak{F}$ logo $\mathfrak{F} \to x$. $\diamondsuit$

Num espaço Hausdorff então um ultrafiltro só pode ter um único ponto de acumulação e ele é o limite.

Capítulo 10

Compacidade

A noção de compacidade desenvolveu-se de certos teoremas de análise clássica.

O Teorema de Bolzano-Weirstrass afirma que um subconjunto S infinito de um intervalo fechado finito $[a, b]$ sempre tem um ponto de acumulação. Aqui por ponto de acumulação entende-se um ponto $c \in [a, b]$ tal que todo intervalo $(c - t, c + t)$ contém um número infinito de pontos de S.

Isto foi generalizado ao seguinte teorema de Heine-Borel: Em $\mathbb{R}^n$ as seguintes propriedades de um subconjunto S são equivalentes:

(a) S e fechado e limitado

(b) Toda sequencia em S tem ponto de acumulação (aqui no sentido de redes)

(c) Se $S \subset \cup_\alpha \mathcal{O}_\alpha$ onde $\mathcal{O}_\alpha$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ entao já um número finito de $\mathcal{O}_\alpha$ cobrem S: $S \subset \mathcal{O}_{\alpha_1} \cup \mathcal{O}_{\alpha_2} \cup \cdots \cup \mathcal{O}_{\alpha_n}$

Suponhamos que o leitor esteja familiar com estes resultados que podem ser encontrados em qualquer texto de análise real.

Note que (b) implica que toda sequência em S tem subrede convergente e como $\mathbb{R}^n$ satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade essa subrede pode ser tomado como subsequência. Essa situação tem grande valor para teoremas de existência, usualmente só podemos mostrar a existencia de problemas aproximados, se estas soluções ficam num conjunto fechado e limitado em $\mathbb{R}^n$ sabemos qu existe um ponto de acumulação de soluções aproximadas e este ponto geralmente é a solução do problema original. Das três propriedades mencionadas no teorema de Heine-Borel só a terceira não refere a estrutura específica do $\mathbb{R}^n$ e então é esta que generalizaremos.

Definição 10.1 *Digamos que uma família S_α, de subconjuntos de um conjunto X é uma* cobertura *de um subconjunto $T \subset X$ se e somente se $T \subset \cup_\alpha S_\alpha$. Uma* subcobertura *de S_α, $\alpha \in A$ e qualquer subfamília S_β, $\beta \in B$, onde $B \subset A$, que tambem é uma cobertura. Uma cobertura por conjuntos abertos num espaço topológico chama-se* cobertura aberta.

Definição 10.2 *Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ chama-se* compacto *se e somente se toda cobertura aberta de X contem uma subcobertura finita.*

Em outras palavras se $X = \cup_{\alpha\in a} S_\alpha$, S_α aberto, existirão índices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que $X = S_{\alpha_1} \cup S_{\alpha_2} \cup \cdots \cup S_{\alpha_n}$.

Passando a complementos podemos reformular a definição de um compacto. Primeiro um outro conceito.

Definição 10.3 *Uma famíllia de conjuntos S_α e dita satisfazer a* propriedade da interseçao finita *se qualquer subfamília finita $S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2}, \ldots, S_{\alpha_n}$ tem interseção não vazia: $S_{\alpha_1} \cap S_{\alpha_2} \cap \cdots \cap S_{\alpha_n} \neq \emptyset$.*

Teorema 10.1 *Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é compacto se e somente se toda família F_α de fechados que goza da propriedade da interseção finita, tem interseção não vazia. Em outras palavras se para toda escolha finita de índices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tem-se $F_{\alpha_1} \cap \cdots \cap F_{\alpha_n} \neq \emptyset$ então para a famllia toda $\cap_{\alpha\in A} F_\alpha \neq \emptyset$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha que $\cap F_\alpha = \emptyset$ então $\cup F_\alpha^c = X$ mas F_α^c é aberto e como X é compacto existe uma subfamília $F_{\alpha_1}, \ldots, F_{\alpha_n}$ tal que $X = \cap_{i=1}^n F_{\alpha_i}^c$ logo $\emptyset = F_{\alpha_1} \cap \cdots \cap F_{\alpha_n}$ em contradição com a propriedade da interseção finita.

($\Leftarrow$) Deixamos esta parte como exerclcio. $\diamondsuit$

Teorema 10.2 *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. As seguintes propriedades são equivalentes:*

(a) *X e compacto*

(b) *Qualquer rede (filtro) em X tem ponto de acumulação*

(c) *Qualquer ultrafiltro em X converge.*

Demonstração:

(a) $\Rightarrow$ (b): Suponha X compacto e x_α uma rede em X Seja $R_\alpha = \{\beta \mid \beta \geq \alpha\}$. Como o conjunto A e dirigido, tem a propriedade da interseção finita e *a fortiori* a família $\bar{R}_\alpha$ tem essa propriedade. Como X e compacto $\cap \bar{R}_\alpha \neq \emptyset$ mas então para $x \in \cap \bar{R}_\alpha$ qualquer vizinhança de x tem pontos em comum com qualquer cauda R_α da rede, logo x_α é frequentemente naquela vizinhança e x e um ponto de acumulação. A demonstração para filtros e paralela a esta.

(b) $\Rightarrow$(c): Seja $\mathfrak{F}$ um ultrafiltro em X, por (b) ele tem ponto de acumulação e pelo Teorema 9.12 $\mathfrak{F}$ converge a esse ponto.

(c) $\Rightarrow$ (a): Suponha que (c) seja verdade e seja F_α uma família de fechados com a propriedade da interseção finita. Logo F_α, $\alpha \in A$ é base de um filtro, e esse filtro e dominado por um ultrafiltro $\mathfrak{U}$. Por (c) $\mathfrak{U} \to x$ mas então x é um ponto de acumulação de $\mathfrak{U}$ e logo pertence ao fecho de qualquer elemento de $\mathfrak{U}$. A fortiori $\forall\, \alpha$, $x \in \bar{F}_\alpha = F_\alpha$, logo $x \in \cap_{\alpha \in A} F_\alpha$ e então $\cap_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \emptyset$ e X é compacto. $\diamondsuit$

Exercício 10.1 *Uma rede x_α, $\alpha \in A$ em X chama-se* rede universal *se para todo $S \subset X$ ou eventualmente $x_\alpha \in S$ ou eventualmente $x_\alpha \in S^c$. Este conceito e paralelo ao do ultrafiltro. Demonstre que*

(a) *Toda rede tem subrede universal (resultado paralelo ao todo filtro ser dominado por um ultrafiltro).*

(b) *Se x_α é uma rede universal e x é um ponto de acumulação de x_α entao $x_\alpha \to x$. (resultado paralelo do Teorema 9.12).*

(c) *Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é compacto se e somente se toda rede universal converge (condição equivalente ao (c) do Teorema 10.2).*

É fácil ver que quando X satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade podemos afirmar que toda sequência tem subsequência convergente. No caso geral toda sequência tem *subrede* convergente, subsequências convergentes podem não existir.

Teorema 10.3 *Seja $(X, \mathcal{T})$ compacto e $f : X \to Y$ contínuo. Então $f(X)$ é compacto. Em outras palavras, imagens contínuas de compactos são compactos.*

Demonstração: Seja $f(X) \subset \cup \mathcal{O}_\alpha$ uma cobertura aberta de $f(X)$), entao $X \subset f^{-1}(\mathcal{O}_\alpha)$ uma cobertura aberta de X, logo $X \subset f^{-1}(\mathcal{O}_{\alpha_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(\mathcal{O}_{\alpha_n})$ pois X é compacto mas então $f(X) \subset \mathcal{O}_{\alpha_1} \cup \cdots \cup \mathcal{O}_{\alpha_n}$ $\diamondsuit$

Corolário 10.1 *Uma função contínua numérica f num compacto X assume um máximo e um mínimo. Isto é existem pontos x_m, $x_n \in X$ tais que $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_n)\ \forall\, x \in x$*

Demonstração: Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua, X compacto. Logo $f(X) \subset \mathbb{R}$ é um compacto e pelo teorema de Heine-Borel $f(X)$ é fechado e limitado. Entao $\sup f(X)$ e $\inf f(X)$ existem e são diferentes de $+\infty$ e $-\infty$ respectivamenle. Como $f(X)$ é fechado o supremo e o ínfimo pertencem a este conjunto, entao existem pontos x_n e x_m tais que $x_N = \sup f(X)$ e $x_m = \inf f(X)$. $\diamondsuit$

Espaços compactos então comportam-se respeito a funções contínuas numa maneira semelhante a conjuntos finitos respeito a funções quaisquer, num conjunto *finito* F, *qualquer* função assume seu valor máximo e mínimo. Num conjunto compacto qualquer função *contínua* faz o mesmo. Compacidade sempre oferece uma passagem do finito para o infinito e vice-versa; de coberturas infinitas a coberturas finitas; de interseções finitas não vazias a interseções infinitas não vazias. Essa passagem é a marca característica de compacidade e pode aparecer em contextos não topológicos, a topologia ẽ um mẽtodo de formalizar esta situação.

Agora podemos mostrar um dos teoremas mais importantes da topologia.

Teorema 10.4 *(Tychonov) - Qualquer produto $X = \prod X_\alpha$ de espaços compactos X_α é compacto em relaçõ a topologia produto.*

Demonstração: Segue da propriodade universal do produto que um filtro $\mathfrak{F}$ em X converge se e somente se todos os filtros $\pi_\alpha(\mathfrak{F})$ convergem em X_α, e se $\pi_\alpha(\mathfrak{F}) \to x_\alpha$ então $\mathfrak{F} \to x = (x_\alpha)$. Seja então $\mathfrak{F}$ um ultrafiltro em X então pelo Teorema 9.12 todo $\pi_\alpha(\mathfrak{F})$ é um ultrafiltro em X_α e como X_α é compacto $\pi_\alpha(\mathfrak{F})$ converge, logo $\mathfrak{F}$ converge e então X é compacto pelo Teorema 10.2. $\diamondsuit$

Note bem que esse teorema depende do axioma de escolha.

Teorema 10.5 *Seja K um espaço compacto e $C \subset K$ um fechado, Então C é compacto.*

Demonstração: Seja $C \subset \cup\mathcal{O}_\alpha$uma cobertura aberta de C então como C e fechado, $K = \cup\mathcal{O}_\alpha \cup C^c$ é uma cobertura aberta de K e como K é compacto existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que $K = \mathcal{O}_{\alpha_1} \cup \cdots \cup \mathcal{O}_{\alpha_n} \cup C^c$ logo $C \subset \mathcal{O}_{\alpha_1} \cup \cdots \cup \mathcal{O}_{\alpha_n}$ e C é compacto. $\diamondsuit$

Agora mostraremos algumas relações entre as propriedades de compacidade e de Hausdorff.

Teorema 10.6 *Um subespaço compacto K de um espaço Hausdorff X é fechado.*

Demonstração: Seja $x \in \bar{K}$ então existe uma rede k_α tal que $k_\alpha \to x$ mas como K é compacto existe um ponto de acumulação k de k_α, assim existe uma subrede $k_{\phi(\beta)} \to k$, mas então $k_{\phi(\beta)} \to x$ também e como X e Hausdorff $k = x$ Logo $x \in K$ e $\bar{K} = K$. $\diamondsuit$

Em espaços não Hausdorff este resultado pode não ser verdadeiro. Por exemplo considere $X = \{1, 2\}$, espaço de Slerpinski, $\mathcal{T}_X = \{\emptyset, X, \{1\}\}$ Entaão $\{1\}$ é compacto pois todo espaço finito e compacto mas $\overline{\{1\}} = X$. Compacidade fora do contexto de aspaços Hausdorff sem nenhuma outra restrição não e uma coisa muito útil. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico qualquer e seja $\star$ um ponto ideal, $\star \notin X$. Seja $Y = X \cup \{\star\}$ com a seguinte topologia: Todos os pontos de X tem base de vizinhanças normal, isto e aquela que ja tem em X. A base de vizinhanças de $\{\star\}$ digamos e dada pelo conjunto $X \cup \{\star\} = Y$ Então Y é compacto pois qualquer cobertura aberta de Y tem que conter Y mesmo e este sozinho ja cobre Y. Essa compacidade porem e extremamente artificial e não tem nada a ver com a estrutura do subconjunto X de Y. A compacidade so tem poder junto com outras propriedades do espaço.

Teorema 10.7 *Seja $f : K \to X$ uma aplicação contínua de um compacto K para um espaço Hausdorff X. Se f é injetora então f é um mergulho. Isto é, f fornece um homeomorfismo $K \simeq f(K) \subset X$.*

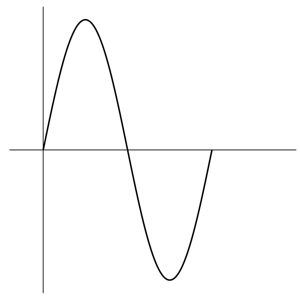
Demonstração: Como f já fomece uma bijeçao contínua $K \to f(K)$, basta mostrar que f leva fechados de K em fechados de $F(K)$. Seja $C \subset K$ fechado, então pelo Teorema 10.5, C é compacto logo $f(C)$ é compacto em $f(K)$ pelo Teorema 10.3. Como $f(K)$ é Hausdorff $f(C)$ e fechado pe]o Teorema 10.6.

$\diamondsuit$

Exemplo 10.1

(a) *Considere* $[0, 1] \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ *dado por* $f(x) = (x, \operatorname{sen}(2\pi x))$

A imagem e o graficoL



Intuitivamente isto é homeomorfo a $[0, 1]$ *mas agora sabemos isto facilmente pois* f *é contínua e injetora.*

(b) *Considere de novo as quatro funções definidas na garrafa de Klein para* $\mathbb{R}^4$ *e dadas na discussao após o Teorema 7.3. A garrafa de Klein e compacta pois é imagem contínua pela aplicação canônica do quadrado que é compacto pelo teorema de Heine-Borel. Uma vez mostrado que aquelas quatro funções definem uma injeção no* $\mathbb{R}^4$ *sabemos agora que isto dá um mergulho.*

A compacidade junto com T_2 então impõe tanta restrição nas aplicações contínuas que elas fazem mergulhos de todas injeções contńuas.

Corolário 10.2 *Seja* $(K, \mathcal{T})$ *um compacto Hausdorff. Se* $\mathcal{T}_1$ *é uma outra topologia Hausdorff tal que* $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}$ *então* $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}$. *Compactos Hausdorff então tém uma topologia Hausdorff minimal.*

Demonstração: Considere a apljcação identidade $\mathrm{id} : x \mapsto x$, $x \in K$ mas entre estruturas topológicas dilerentes: $\mathrm{id} : (K, \mathcal{T}) \to (K, \mathcal{T}_1)$. Como $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}$ esta aplicação contínua, e como $\mathcal{T}_1$ é Hausdorff pelo Teorema 10.7 id é um homeomorfismo, entao $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}$. $\diamondsuit$

Vamos mostrar agora em que contexto compacidade é equivalente a compacidade encontrada no teorema de Heine Borel que toda sequência tem uma subsequência convergente. Já sabemos que compacto e 1º enumerável $\Rightarrow$ toda sequência tem uma subsequência convergente mas *não é verdade* que 1º enumerável e toda sequência tem subsequência convergentet $\Rightarrow$ compacto.

Definição 10.4 *Um espaço topológico* $(X, \mathcal{T})$ *é dito satisfazer o* segundo axioma de enumerabilidade $\Leftrightarrow$ X *tem uma base enumerável para a topologia.*

Um exemplo simples é $\mathbb{R}^n$ onde bolas de raio racional em centros com componentes racionais formam uma base enumerável.

Note que 2º enumerável $\Rightarrow$ 1º enumerável pois uma base da topologia dá também uma base para as vizinhanças de cada ponto. A reciproca não é verdade. O contra-exemplo mais simples é um conjunto não enumerável com a topologia discreta. Todo ponto x tem $\{\{x\}\}$ como base de vizinhanças, então o espaço é 1º enumerável mas como a base da topologia tem que exprimir todo $\{x\}$ como reuniao de elementos da base, quer dizer todo $\{x\}$ tem que pertencer a base, ela não pode ser enumerável. Da mesma maneira uma soma topológica $\coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$. de um número não enumerável de espaços não pode ser 2º enumerável.

Tiramos duas consequências do 2º axioma da enumerabllidade.

Teorema 10.8 (X, T) 2º *enumerável* $\Rightarrow$ *toda cobertura aberta* $X = \cup_{\alpha \in A} \mathcal{O}_\alpha$ *de* X *contem uma subcobertura enumerável.*

Demonstração: Seja X 2º enumerável e $X = \cup_{\alpha \in A} \mathcal{O}_\alpha$ uma cobertura aberta. Para todo $x \in X$ existe entao um $\mathcal{O}_\alpha(x)$ tal que $x \in \mathcal{O}_\alpha(x)$Â· Se B_i $i = 1, 2, \ldots$ é uma base enumeravel, então existe um ńdice $i(x)$ tal que $x \in B_{i(x)} \subset \mathcal{O}_\alpha(x)$. Seja I o conjunto de ńdices $\{i(x) \,|\, x \in X\} \subset \mathbb{N}$. Para todo $k \in I$ escolha um $\alpha_k \in A$ tal que $B_k \subset \mathcal{O}_{\alpha_k}$ que existe pois se $k = i(x)$, $\alpha_k = \alpha(x)$ já serve. Como os B_k cobrem X tem-se $X = \cup_{k \in I} \mathcal{O}_{\alpha_k}$. $\diamondsuit$

Espaços 2º enumeráveis então forneecem passagens de ńmeros infinitos quaisquer para o enumerável. É um certo tipo de compacidade enfraquecida. Espaços que gozam da propriedade que toda cobertura tem subcobertura enumeravel chamam-se de espaços de *Lindelöf*. A recíproca do teorema não e verdadeira, se um espaço for Lindelöf isto não implicará que ele e 2º enumerável.

Definição 10.5 *Um subconjunto* $D \subset X$ *de um espaço topológico chama-se* denso $\Leftrightarrow \bar{D} = X$.

Exemplo 10.2

(a) *Todo espaço é dense em si mesmo.*

(b) *Os racionais são densos em* $\mathbb{R}$.

(c) *Os conjuntos* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *e* $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R} \times \{0\}$ *sao densos em* $\mathbb{R}^2$

(d) *Pelo teorema de Stone-Weierstrass os polinômios são densos em* $C([O,1],\mathbb{R})$ *com a topologia dado pela métrica* $d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$.

Teorema 10.9 $(X,\mathcal{T})$ $2^{\underline{o}}$ *enumerável* $\Rightarrow$ X *tem um subconjunto enumerável denso*

Demonstração: Seja B_i, $i = 1,2,3,\ldots$ uma base enumerável, escolha um $x_i \in B_i$ seja $D = \{x_i \,|\, i = 1,2,\ldots\}$. D é denso pois dado qualquer $x \in X$ e qualquer vizinhança V de x então V^o é reunião de elementos da base logo x pertence a algum B_i tal que $x \in B_i \subset V$. Logo $x_i \in V$ e então $V \cap D \neq \emptyset$, isto quer dizer $x \in \bar{D}$ e como x é arbitrário $\bar{D} = X$. $\diamondsuit$

Em $\mathbb{R}^n$ os pontos com coordenadas racionais é um conjunto denso enumerável. Em $C([0,1],\mathbb{R})$ os polinômios com coeficientes racionais é um conjuntodensd enumerável.

Definição 10.6 *Um espaço que possui um conjunto denso enumerável chama-se* separável.

A recíproca do Teorema 10.9 não é verdadeira. Para espaços métricos porém ela é verdadeira.

Teorema 10.10 *Seja* X *um espaço métrico. Entio* X *é* $2^{\underline{o}}$ *enumerável* $\Rightarrow X$ *é separável.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Segue do teorema anterior.

($\Leftarrow$) Seja x_i, $i = 1,2,\ldots$ um conjunto denso enumerável, e seja $\mathcal{B} =$ família de bolas centradas nos x_i com raios racionais. Evidentemente $\mathcal{B}$ é enumerável e mostraremos que é uma base. Seja U um aberto qualquer e $x \in U$, existe uma bola $B_\rho(x)$ com raio racional tal que $B_\rho(x) \subset U$ Como $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é denso existe um $x_i \in B_{\rho/3}(x)$ mas então tem-se que $x \in B_{2\rho/3}(x_i) \subset U$. Como x é arbitrário, U é reunião de elementos de $\mathcal{B}$. $\diamondsuit$

Agora podemos dar condições para compacidade em termos de existência de subsequências convergentes.

Teorema 10.11 *Seja* X *um espaço* $2^{\underline{o}}$ *enumerável. Então* X *é compacto* $\Leftrightarrow$ *toda sequência tem uma subsequência convergente.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Segue do fato que X é 1º enumerável.

($\Leftarrow$) Suponha que toda sequência tem subsequência convergente e seja $X = \cup_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta de X. Como X é 2º enumerável podemos pelo Teorema 10.8 passar a uma subcobertura enumerável $\mathcal{O}_i$, $i \in \mathbb{N}$. Defina os abertos B_i por indução: $B_1 = \mathcal{O}_1$ e dados $B_1, \ldots, B_{p-1}$ seja B_p o primeiro dos $\mathcal{O}_i$ que nao é já coberto por $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{p-1}$; se B_p nao existir etão $B_1, \ldots, B_{p-1}$ já será uma subcobertura finita de X então, suponha pelo contrário que B_i existe para todo $i \in \mathbb{N}$. Pela construção dos B_i existe um ponto x_p em todo B_p tal que $x_p \notin B_k$, $k = 1, 2, \ldots, p-1$. Pela hipótese a sequência x_i tem um ponto de acumulação x c como os B_i cobrem X tem-se $x \in B_p$ para algum p. Como frequentemente $x_i \in B_p$ existe um $q > p$ tal que $x_q \in B_p$ mas isso contradiz a construção dos x_i. $\diamondsuit$

As relações entre as várias propriedades de compacidade e questões de enumerabilidade são extremamente complexas. É fácil se enganar a respeito disto e é um bom conselho não acreditar em nada sem uma demonstração rigorosa.

Capítulo 11

Conexidade

Agora vamos voltar para certas operações inversas as que foram estudadas na parte de construções. Em particular neste capítulo procuraremos decompor espaços topológicos e no seguinte mergulhá-los.

Definição 11.1 *Dizemos um espaço topológico é* desconexo *ou* não conexo *se e somente se* $X \simeq X_1 \coprod X_2$ *onde* $X_1 \neq \emptyset$, $X_2 \neq \emptyset$.

Em outras palavras X é uma soma topológica de dois espaços não vazios. Assim X consiste de pelo menos dois pedaços topologicamente independentes.

Teorema 11.1 *As segujntes três condições são equivalentes:*

(a) X *é não conexo*

(b) $X = A \cup B$ *onde* $A \cap B = \emptyset$ *e* $A \neq \emptyset \neq B$ *e ambos são abertos (e então ambos são fechados)*

(c) *Existe uma função contínua não constante* $f : X \to \mathbf{2} = \{0.1\}$. *(Note que neste caso não constante* $\Leftrightarrow$ *sobrejetora).*

Demonstração:

(a) $\Rightarrow$ (b): em $X \simeq X_1 \coprod X_2$, $X_1 \coprod \emptyset$. $\emptyset \coprod X_2$ são dois conjuntos de tipo requerido em (b), como (b) é uma propriedade topológica ela agoa segue do (a)

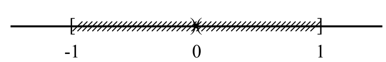
(b) $\Rightarrow$ (c): Se $X = A \cup B$, como em (b) defina f por $f = \begin{cases} 0 & x \in A \\ 1 & x \in B \end{cases}$ esta é contínua não constante.

(c) $\Rightarrow$ (a): Dado tal f seja $A = f^{-1}(0)$, $B = f^{-1}(1)$ e considere $A \coprod B$ e as injeções canônicas $i_A : A \to A \coprod B$ $i_B : B \to A \coprod B$. A aplicação $h(x) = \begin{cases} i_A x & x \in A \\ i_B x & x \in G \end{cases}$ define um homeomorfismo entre X e $A \coprod B$. $\diamondsuit$

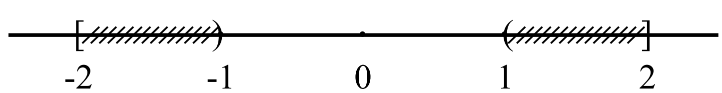
Exemplo 11.1

(a) *Todo espaço discreto com mais que um ponto é desconexo, pois qualquer partição em dois subconjuntos não vazios é uma partição em abertos não vazios disjuntos.*

(b) *O espaço* $X = [-1, 0) \cup (0, 1]$ *é desconexo, pois* $[-1, 0) = X \cap (-2, 0)$ *e* $(0, 1] = X \cap (0, 2)$ *são abertos, não vazios, disjuntos, cuja reunião é* X.



Note que este espaço é homeomorfo a $[-2, -1) \cup (1, 2]$



que móstra que o fato que as $[-1, 0)$ *e* $(0, 1]$ *são encostados é um fato do mergulho e não um fato intrínsico.*

(c) *Os números racionais* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ *na topologia induzida é desconexo pois* $Q = (Q \cap (-\infty, \pi)) \cup ((\pi, \infty) \cap Q)$ *é uma partição do tipo (b) no teorema acima.*

Definição 11.2 *Um espaço topológico chama-se* conexo *se ele não é desconexo.*

Um espaço conexo não pode ser decomposto numa soma topológica não trivial.

Teorema 11.2 *Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é conexo se e somente se X é um intervalo (aberto, fechado, semi-aberto, finito, semifinito, ou $\mathbb{R}$ todo), $X = \emptyset$ ou X consiste de um ponto só.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha X tem pelo menos dois pontos e é conexo. Se X não fosse um intervalo existiriam pontos $a, b \in X$ e $c \notin X$ tais que $a < c < b$ mas então $X = ((-\infty, c) \cap X) \cup ((c, \infty) \cap X)$ seiria uma decomposição não trivial.

($\Leftarrow$) $\emptyset$ e os conjuntos unitários são evidentemente conexos então suponha X é um intervalo. Se X não fosse conexo então existiria uma função contínua sobrejetora $f : X \to \mathbb{2}$. Sejam $f(a) = 0$, $f(b) = 1$ e suponha $a < b$ (se não considere $1 - f$ vez de f). Como f é contínua $f^{-1}(0)$ é uma vizinhança de a e logo existe um $\xi > a$ tal que $[a, \xi) \subset f^{-1}(0)$. Seja $x = \sup\{\xi \mid [a, \xi) \subset f^{-1}(0)\}$ pelo fato que $a < b$ tem-se $x \leq b$, pelo fato que X é um intervalo tem-se $x \in X$ e pela continuidade de f, $f(x) = 0$, logo $x < b$ mas agora $f^{-1}(0)$ é uma vizinhança de x e existe um $\eta > x$ tal que $f^{-1}(0) \supset [x, \eta)$ logo $[a, \eta) \subset f^{-1}(0)$ contradizendo a definição de x. $\diamondsuit$

Teorema 11.3 *A imagem $f(X)$ de um espaço conexo X por uma função contínua $f : X \to Y$ é um subconjunto conexo de Y.*

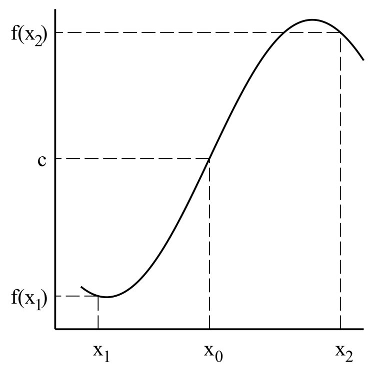
Demonstração: Se $f(X)$ for desconexa então existiria uma função contínua sobrejetora $f(X) \xrightarrow{\phi} \mathbb{2}$ logo $\phi \circ f : F \to \mathbb{2}$ é contínua e sobrejetora contradizendo a conexidade de X. $\diamondsuit$

Como aplicação imediata disto temos o seguinte teorema de análise.

Teorema 11.4 *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida num espaço conexo, então qualquer número c entre dois valores de f, $f(x_1) < c < f(x_2)$ é assumido: isto é existe um $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = c$*

Demonstração: Pelo Teorema 11.3 $f(X) \subset \mathbb{R}$ é conexo, logo como $f(x_1) < f(x_2)$, $f(X)$ é um intervalo e sendo $f(x_1) < c < f(x_2)$, c pertence a este intervalo e $c \in f(X)$; assim $c = f(x_0)$ para algum $x_0 \in X$. $\diamondsuit$

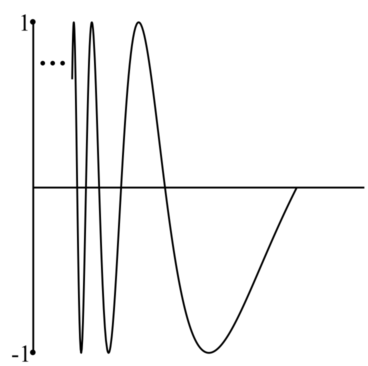
Quando X é um intervalo isto é um teorema clássico de análise.



Teorema 11.5 *Seja $S \subset X$ um subconjunto de um espaço topológico. Se S é conexo então qualquer subconjunto T tal que $S \subset T \subset \bar{S}$ também é conexo.*

Demonstração: Suponha T não conexo e $f : T \to \mathbb{2}$ contínuo sobrejetora. Como S é conexo $f|S$ não é sobrejetora, digamos $f(S) = 0$. Seja $t \in T$ tal que $f(t) = 1$ como $t \in \bar{S}$ existe uma rede $s_\alpha \to t$ e como f é contínua $f(s_\alpha) \to f(t)$ ou seja $0 \to 1$ que não é verdade em $\mathbb{2}$. $\diamondsuit$

Exemplo 11.2 *Considere o conjunto $\{0\} \times [-1, 1] \cup \{\big(x, \operatorname{sen}\frac{1}{x}\big)\} \,|\, 0 < x < \frac{1}{\pi}$ $x \in \mathbb{R}^2$. Ele é conexo pois é o fecho do gráfico $\big(x, \operatorname{sen}\frac{1}{x}\big)$ $x \in \big(0, \frac{1}{\pi}\big)$ e como*



$x \mapsto \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ é contínuo e $\big(0, \frac{1}{\pi}\big)$ é conexo este gráfico é conexo. Repare que dado qualquer subconjunto de $\{0\} \times [-1, 1]$ como $\{(0, 1)\} \cup \{(0, -1)\}$ a reunião dele com o gráfico também é um conjunto conexo pelo teorema precedente. A conexidade é então imposta pela presença do gráfico oscilante.

Teorema 11.6 *Seja S_α uma família de subconjuntos conexos de um espaço topoógico. Se a família S_α tem um ponto em comum (isto é $\cap S_\alpha \neq \emptyset$) então $\cup S_\alpha$ é conexo.*

Demonstração: Seja $x_0 \in \cap S_\alpha$ e $f : \cup S_\alpha \to 2$ contínua, como S_α é conexa $f|S_\alpha(x) = f(x_0)$ para $x \in S\alpha$, então $f(x) = f(x_0)$ para $x \in \cup S_\alpha$. logo f nunca pode ser sobrejetora e $\cup S_\alpha$ é conexa. $\diamondsuit$

Agora vamos tentar achar os pedaços conexos de um espaço topológico:

Definição 11.3 *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $x \in X$. O* componente conexo *$C(x)$ de x é a reunião de todos os subconjuntos conexos que contém x.*

Exemplo 11.3

(a) $X = [-1, 0) \cup (0, 1]$ *tem dois componentes,* $[1, 0)$ *é* $C(x)$ *para* $x \in [1, 0)$ *e* $(0, 1]$ *é* $C(x)$ *para* $x \in (0, 1]$.

(b) *Qualquer espaço discreto satisfaz* $C(x) = \{x\}$ *os componentes são conjuntos unitários.*

(c) *Considere* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$*; se* $p \in \mathbb{Q}$ *então* $C(p) = \{p\}$ *pois se* $p, q \in S$ *e* $p < q$ *digamos, então existe um irracional* ξ*,* $p < \xi < q$ *e logo* $S = (S \cap (-\infty, \xi)) \cap ((S \cap (\xi, \infty))$ *não pode ser conexo. Repare bem que a topologia em* $\mathbb{Q}$ *não é discreta mas mesmo assim os componentes são onjuntos unitários.*

Teorema 11.7 *Os componentes conexos satiafazem:*

(a) *todo $C(x)$ é um subconjunto conexo maximal*

(b) *os $C(x)$ definem uma partição de X*

(c) *todo componente é fechado.*

Demonstração:

(a) Segue da definição e do Teorema 11.6

(b) Se $y \in C(x_1) \cap C(x_2)$ então peló Teorema 11.6 $C(x_1) \cup C(x_2)$ é conexo e usando (a), temos $C(x_1) = C(x_2)$.

(c) $C(x)$ é conexo logo $\overline{C(x)}$ é conexo pelo Teorema 11.5 e pela maximalidade $\overline{C(x)} = C(x)$.

$\diamondsuit$

Um componente pode não ser aberto. Veja Exemplo 11.3 de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$: $C(p) = \{p\}$ mas $\{p\}$ não é aberto. Isto pode parecer estranho tendo em vista a definição de não conexidade como a possibilidade de decompor X numa partição não trivial de coonjuntos abertos: $X = A \cup B$, mas nunca dizemos que A e B são componentes, eles podem ser a sua vez desconexos como acontece no exemplo de $\mathbb{Q}$. Este fato nos impede de dizer que o espaço X é a soma topológica de seus componentes. Em geral então é impossível de decompor um espaço numa soma tpológica de espaços a suas vezes indecomponíveis. Se escrevemos por exemplo $\mathbb{Q} = \coprod_\alpha A_\alpha$ com $A_\alpha \neq \emptyset$. qualquer um dos A_α pode ser decomposto ainda mais.

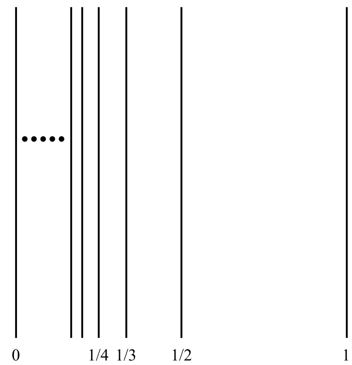
Podemus afirmar porém o seguinte:

Teorema 11.8 *Seja C_α o sistema de componentes de um espaço topológico X. Se todo C_α. é aberto então $X = \coprod_\alpha C_\alpha$.*

Demonstração: Seja $i_\alpha : C_\alpha \to \coprod_\alpha C_\alpha$ as injeções canônicas, defina $h : X \to \coprod_\alpha C_\alpha$ por $h(x] = i_\alpha(x)$ para $x \in C_\alpha$. Isto é um homeomorfismo pois dado um aberto $\mathcal{O} \subset \coprod_\alpha C_\alpha$ tem-se $\mathcal{O} = \coprod_\alpha \mathcal{O}_\alpha$ onde $\mathcal{O}_\alpha \subset C_\alpha$ é aberto em C_α assim $\mathcal{O}_\alpha = G_\alpha \cap C_\alpha$ onde G_α é aberto em X, mas como cada C_α é aberto, $\mathcal{O}_\alpha$ é aberto em X e logo $h^{-1}(\mathcal{O}) = \cup_{\alpha \in A} \mathcal{O}_\alpha$ é aberto. Agora dado um aberto $\mathcal{O} \subset X$ tem-se $\mathcal{O} = \cup_{\alpha \in A}(\mathcal{O} \cap C_\alpha)$ sendo C_α, $\alpha \in A$ uma partição de X; logo $h(\mathcal{O}) = \coprod_{\alpha \in A} \mathcal{O} \cap C_\alpha$ um aberto pois todo $\mathcal{O} \cap C_\alpha$ é aberto sendo que cada C_α aberto. Evidentemente h é biunívoca. $\diamondsuit$

Exemplo 11.4 *Os dois componentes de $X = [-1, 0) \cup (0, 1]$ são abertos. Logo $X \simeq [-1, 0) \coprod (0, 1]$.*

Em geral só podemos fazer uma decomposiçio parcial. Seja C_α a família de componentes conexas de X e suponha que algumas delas C_γ, $\gamma \in \Gamma$ sao abertas e além disto que $\cup C_\gamma$ é fecbado. Como agora $\cup_{\alpha \notin \Gamma} C_\alpha$ e $\cup_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma$ são ambos abertos e fechados tem-se $X = (\cup_{\alpha \notin \Gamma} C_\alpha) \coprod \cup_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma$. mas usando o teorema acima $X \simeq (\cup_{\alpha \notin \Gamma} C_\alpha) \coprod \coprod_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma$. Por exemplo seja $X = (\{0\} \cup \{\frac{1}{n},\, n = 1, 2, \ldots\}) \times [0, 1]$ a seguinte reunião de intervalos:



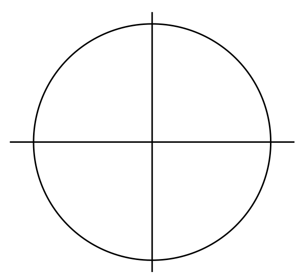
Os componentes são $\{\frac{1}{n}\} \times [0,1] = C_n$ e $C_\infty = \{0\} \times [0,1]$. Destas só C_∞ não é aberto. A reunião de qualquer número finito dos C_n é fechado então podemos afirmar dado um $F \subset \mathbb{N}$ finito que $X = (\coprod_{n \in F} C_n) \coprod (C_\infty \cup \cup_{n \notin F} C_n)$ mas o último espaço aqui pode ser decomposto por sua vez. Não existe uma decomposição em espaços conexsos.

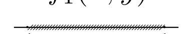
Cuidado: Não confunda $\cup$ com $\coprod$, por exemplo como subespaços de $\mathbb{R}$ podemos afirmar $[0,1] = [0,1/2) \cup [1/2,1]$ mas não é verdade que $[0,1] \simeq [0,1/2) \coprod [1/2,1]$. A reunião é uma operação que só definimos para conjuntos, não é operação entre dois espaços topológicos, a soma $\coprod$ é uma operaçao tanto entre espaços topológicos quanto entre conjuntos. Embora que $[0,1/2)$ e $[1/2,1]$ sejam disjuntos, $[0,1]$ nao é $[0,1/2) \coprod [1/2,1]$ pois este último é desconexo e $[0,1]$ é conexo.

Capítulo 12

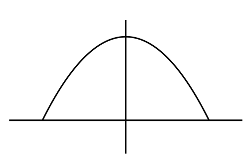
Espaços completamente regulares

Para motivar este tipo de espaço considere a seguinte situação. Dado o círculo $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$

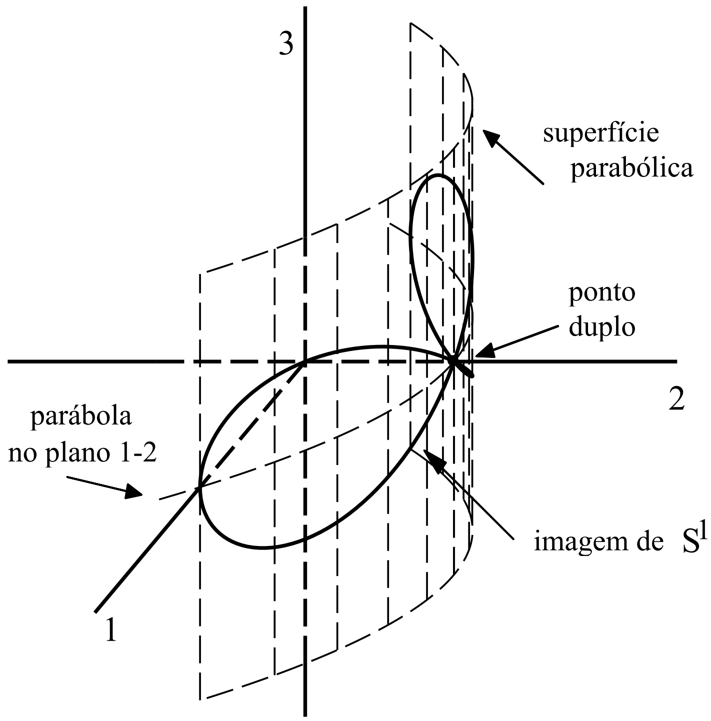


esquemos que já temos este espaço mergulhado em $\mathbb{R}^2$ e tentemos mergulhá-lo de novo usando funções contínuas. Seja $f_1 = x|S^1$, isto é $f_1(x, y) = x$, $(x, y) \in S^1$. Assim temos $f_1 : S^1 \to \mathbb{R}$ com imagem $[-1, 1]$ 

. Isto nao é um mergulho pois f_1 não é injetora. Escolhemos outra função "por acaso" $f_2 = y^2|S^1$ Agora podemos considerar essas duas como componentes de uma função para $\mathbb{R}^2$, $s \in S^1 \qquad (f_1(s), f_2(s)) = (x, y^2) \in \mathbb{R}^2$.



Como $y^2 = 1 - x^2$ a imagem é um arco de uma parábola, mas isto também não é um mergulho. Seja $f_3 = xy|S^1$, agora temos uma função para $\mathbb{R}^3$ $(x, y) \in S^1 \mapsto (x, y^2, xy) \in \mathbb{R}^3$ que tem a seguinte imagem:



Mas isto ainda não é um mergulho pois $(0,1),(0,-1) \mapsto (0,1,0)$. Para finalmente obter um mergulno devemos achar uma função que distingue estes dois pontos, por exemplo $f_4 = (1 - y^3)|S^1$. Assim $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) : S^1 \to \mathbb{R}^4$ dá um megulho pois agora esta apliçao é contínua e injetora, S^1 é compacta e $\mathbb{R}^4$ é Hausdorff. Então aplique o Teorema 10.7. Em nosso caso esse grande trabalho é supérfluo já tendo S^1 mergulhado mais efetivamente em $\mathbb{R}^2$ mas dado um espaço topológico abstrato isto é a única maneira de tentar achar um mergulho num produto de retas. Um mergulho deste tipo seria desejável pois sabendo a estrutura da reta muito bem podemos usar o espaço ambiente para explorar a estrutura do espaço mergulhado. O problema então pode ser posto assim: achar uma família de funções contínuas $f_\alpha : X \to \mathbb{R}$ num espaço topológico tal que $X \stackrel{\pi f_\alpha}{\to} \prod_{\alpha \in A} \mathbb{R}$ é um mergulho. Um outro modo de entender isto no nosso caso do círculo e introduzir o parâmetro angular $\theta \in [0, 2\pi]$ e escrever $x = \cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$. Logo a função F é dada por $F(e) = (\cos\theta, \operatorname{sen}^2\theta, \operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 1 - \operatorname{sen}^3\theta)$ e reconhccemos assim uma equação paramétrica de uma curva (neste caso S^1) em $\mathbb{R}^4$. Do mesmo jeito podemos pensar em $\prod f_\alpha$ acima como uma equação paramétrica para um subconjunto de $\prod \mathbb{R}$, neste caso o parámetro seria um ponto variável em X. Como não sabemos a priori quantas funções serveriam nem quais, perguntemos se usando *todas* conseguimos um mergulho. Seja então $C(X)$ o espaço de todas as funcções contínuas $f : X \to \mathbb{R}$. Considere a aplicação $p : X \overset{\prod f}{\to} \prod_{f \in C(X)} \mathbb{R}$. Um elemento de $\prod_C \mathbb{R}$ então é uma f amília de números reais indexados pelas funções contínuas; p é dado por $p(x) = (r_f)$ onde $r_f = f(x)$ ou mais simplesmente $p(x) = (f(x))$; isto é, todo f determina um eixo em $\prod \mathbb{R}$ e a projeção de $p(x)$ naquele eixo é exatamente $f(x)$. No caso do círculo temos, com quatro funções, $F : S^1 \to \prod_{f_1,f_2,f_3,f_4} \mathbb{R} \quad s :\mapsto (r_{f_1}, r_{f_2}, r_{f_3}, r_{f_4})$ onde $r_{f_i} = f_i(s)$, ou seja $F(s) = (f_1(s), f_2(s), f_3(s), f_4(s)) = (f_i(s))$; este exemplo estabelece a notação mais concretamente. Toda função é usada como coordenada. O seguinte lema mostra a consistência de olhar para um mergulho usando todas as funções contínuas.

Lema 12.1 *Se existe uma família f_α, $\alpha \in A$ de funções contínuas $X \to \mathbb{R}$ tal que $m : X \overset{\prod f_\alpha}{\to} \prod_{\alpha \in A} \mathbb{R}$ é um mergulho, então $p : X \overset{\prod f}{\to} \prod_{C(X)} \mathbb{R}$ é um mergulho.*

Demonstração: Corno $\{f_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset C(X)$, temos uma projeçao $\pi_A : \prod_{C(X)} \mathbb{R} \to \prod_{\alpha \in A} \mathbb{R}$ (ignore as componentes que não correspondem à família $\{f_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Temos o seguinte diagrama.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "m"'] & p(X) \subset \prod_C \mathbb{R} \arrow[dl, "\pi_A|p(X)"] \\
m(X) & \\
\cap & \\
\prod_A \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

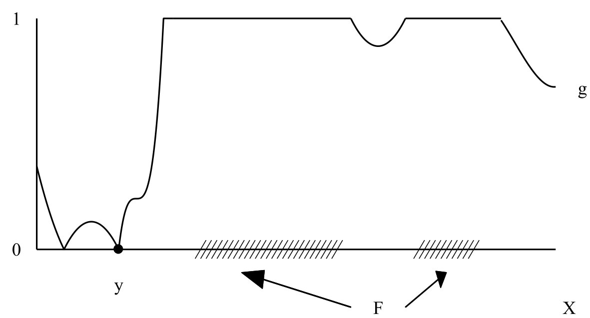
Por hipótese m é um homeomorfismo sobre $m(X)$. Como $m = \pi_A|p(X) = p$, p deve ser bijetor (se não for, m não seria) sobre $P(X)$. Pela propriedade universal p é contínua, logo basta mostrar que p leva abertos em abertos. Seja U

aberto em X logo $p(U) = (\pi_A|P(x))^{-1}(m(U))$. Mas m é um homeomorfismo e $m(U)$ é aberto, como $\pi_A|p(X)$ é contínuo concluimos $p(U)$ é aberto. Logo p é um mergulho. $\diamondsuit$

Este lema mostra que se não conseguirmos mergulhar X usando todas as funções não conseguiremos com uma subfamília, logo usando $C(X)$ é a melhor tentativa a priori e faz sentido de usá.

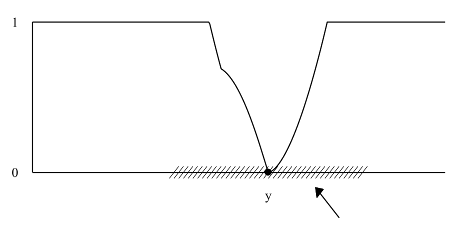
Mostraremos que p é um mergulho se e somente se uma certa condiçio local é satisfeita. Para esse fim definimos espaços completamente regulares.

Definição 12.1 *Um espaço topológico* $(X, \mathcal{T})$ *chama-se* completamente regular *se ele é Hausdorff e dado um fechado* $F \subset X$ *e um ponto* $y \notin F$ *existe uma funçio contínua* $g : X \to [0, 1]$ *tal que* $g(y) = 0$ *e* $g|F = 1$.



Notemos que esta definição é equivalente a uma condição local dada pelo seguinte lema.

Lema 12.2 *Um espaço topológico* $(X.\mathcal{T})$ *é completamente regular se e somente se dado* $y \in X$ *e uma vizinhança* V *de* y *existe uma função contínua* $g : X \to [0, 1]$ *tal que* $g(y) = 0$ *e* $g(X) = 1$ *para* $x \in V^c$.



Demonstração:

($\Rightarrow$) Sejam $y \in X$ e V uma vizinhança de y. Sendo V^{oc} fechado e $y \notin V^{oc}$ a existência da função g segue da regularidade completa.

($\Leftarrow$) Suponha $y \in X$ e F fechado com $y \notin F$. Existe uma vizinhança V de y tal que $V \cap F = \emptyset$. Como $F \subset V^c$ a função g garantida pelo enunciado satisfaz $g(y) = 0$ e $g|F = 1$. $\diamondsuit$

Exemplo 12.1 *Todo espaço métrico é completamente regular. Seja $y \in X$, um espaço métrico, e V uma vizinhança aberta de y. Existe uma bola $B_r(y) \subset V$. Seja então $g(x) = \min\left(\frac{1}{r}d(x,y), 1\right)$ e esta g serve.*

Precisamos de algumas proposições sobre espaços completamente regulares. Usaremos sempre o Lema12.2.

Teorema 12.1 *Seja $(X, \mathcal{T})$ completamente regular e $S \subset X$ então S é completamente regular na topologia induzida.*

Demonstração: Seja $y \in S$ e V uma vizinhança de y em S. Assim $V = S \cap U$ onde U é uma vizinhança de y em X. Seja $g : X \to [0, 1]$ função contínua tal que $g(y) = 0$, $g|U^c = 1$. Agora $g|S$ resolve o problema para $y \in V$ em S. $\diamondsuit$

Teorema 12.2 *Seja $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ uma família de espaços completamente regulares então $\prod X_\alpha$ é completamente regular na topologia produto.*

Demonstração: Sejam $y \in \prod X_\alpha$ e V uma vizinhança aberta de y. O ponto y é uma família $\{y_\alpha\}$ e sendo a topologia a de produto existe uma vizinhança básica $\bigcap_{i=1}^n (\pi_\alpha)^{-1}(V_{\alpha_i}) \subset V$ onde os V_{α_i} são vizinhanças abertas de y_{α_1} e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ é uma coleção finita de índices. Como todo X_{α_i} é completamente regular existem funções $g_{\alpha_i} : X_{\alpha_i} \to [0, 1]$ tais que $(g_{\alpha_i}(y_{\alpha_i}) = 0$ e $g_{\alpha_i}|V_{\alpha_i}^c = 1$. Seja agora $g(x) = \max_{i=1,2,\ldots,n} g_{\alpha_i} \circ \pi_{\alpha_i}(x) = \max_{i=1,2,\ldots,n} g_{\alpha_i}(x_{\alpha_i})$: g é contínua pois todo $g_{\alpha_i} \circ \pi_{\alpha_i}$ é e $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mapsto \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ é contínua como aplicação $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. $g(y) = \max(g_{\alpha_i}(y_{\alpha_i}) = \max(0, \ldots, 0) = 0$ e se $x \notin V^c$ então algum $x_{\alpha_i} \notin V_{\alpha_i}$ logo algum $g_{\alpha_i}(x_{\alpha_i}) = 1$ logo $g(x) = 1$. $\diamondsuit$

Teorema 12.3 *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço completamente regular. Então as imagens inversas $f^{-1}((-1, 1))$ pelas funçoes contínuas formam uma base da topologia.*

Demonstração: Como todo conjunto $f^{-1}((-1,1))$ é aberto basta mostrar que toda vizinhança de um ponto y contém uma vizinhança daquela forma; dado V vizinhança de y então construa a função $g : X \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ com $g(y) = 0$, $g|V^c = 1$ logo $g^{-1}((-1,1))$ é uma vizinhança de y e $g^{-1}((-1,1)) \subset V$. $\diamondsuit$

Teorema 12.4 *Um espaço Hausdorff* $(X, \mathcal{T})$ *é completamente regular se e só se* $\mathcal{T}$ *é a topologia mais fraca para a qual todas as funções contínuas* $X \to \mathbb{R}$ *são contínuas.*

Demonstração: Por mais estranho que este enunciado possa aparecer ele tem sentido pois dado $(X, \mathcal{T})$ podemos considerar a família $C(X)$ de funções contínuas; agora esquecendo que esta família está relacionada com uma topologia $\mathcal{T}$ podemos perguntar qual é a topologia mais fraca que faz toda função desta família contínua. Seja $\mathcal{T}_i$ essa topologia inicial. Com essa introdução:

($\Rightarrow$) Claramente $\mathcal{T}_i \leq \mathcal{T}$ pois toda função em $C(x)$ já é contínua em $\mathcal{T}$. Agora $\mathcal{T}_i$ é gerada pelas imagens inversas $f^{-1}(U)$ de abertos em $\mathbb{R}$ por funções em $C(X)$, mas a proposição precedente diz que já os conjuntos $f^{-1}((-1,1))$, $f \in C(X)$ dão uma base de $\mathcal{T}$ logo $\mathcal{T}_i \geq \mathcal{T}$. Assim $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}$.

($\Leftarrow$) Suponha que $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}$ e seja $y \in X$ e V uma vizinhança de y. Como por hipótese $V \in \mathcal{T}_i$ existe uma coleção finita de abertos $U_k \subset \mathbb{R}$ e funções $f_k \in C(X)$ tal que $y \in \cap_1^n f_k^{-1}(U_k) \subset V$. Considere então $F : X \to \mathbb{R}^n$ dado por $x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. O conjunto $U_1 \times \cdots \times U_n$ então é uma vizinhança de $F(y)$ em $\mathbb{R}^n$. Como $\mathbb{R}^n$ é métrico, ele é compleiamente regular e existe um $\hat{g} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ com $\hat{g}(F(y)) = 0$ e $\hat{g} = 1$ em $(U_1 \times \cdots \times U_n)^c$. Agora $g = \hat{g} \circ F : X \to [0,1]$ satisfaz $g(y) = 0$ e $g = 1$ em V^c logo X é completamente regular. $\diamondsuit$

Este teorema diz que a topologia de um espaço completamente regular é totalmente determinado pelas funções contínuas reais nele. Como em análise nós geralmente só temos informação topológica através de funções contínuas reais, os espaços completamente regulares formam um contexto natural para análise. Tendo em vista que a topologia começou generalizando o conceito de continuidade de funções reais de variáveis reais, qualquer situação com espaços não completamente regulares reflete idéias fora deste início primário. Nestes casos a topologia reflete também informações não analíticas.

Teorema 12.5 *Um espaço topo1ógico* $(X, \mathcal{T})$ *é completamente regular se e somente se a aplicaçio* $p : X \to \prod_{C(X)} \mathbb{R}$ *é um mergulho.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja p um mergulho então $X \simeq p(X)$. Agora $\mathbb{R}$ é completamente regular sendo um espaço métrico, e então $p : X \to \prod_{C(X)} \mathbb{R}$ é completamente regular. Assirn também $\prod_{C(X)} \mathbb{R}$ é completamente regular. (Ver Teorernas 12.1 e 12.3). Como regularidade completa é uma propriedade topológica, X é completamente regular.

($\Leftarrow$) A aplicação $p : X \to \prod_{C(X)} \mathbb{R}$ é dado por $p(x) = (f(x))$ (nesta última expressão pense em x como eixo e f variável). Considere $p : X \to p(X)$. Esta é sobrejetora por definição da imagem, ela também é injetara pois se $x \neq y$ pela regula idade completa de X existe uma função contínua $g : X \to \mathbb{R}$ com $g(y) = 0$, $g(x) = 1$. (Use a Def'inição 12.1 com $F = \{x\}$ fechado sendo X Hausdorff). Logo a g-ésima componente $g(x)$ de $p(x)$ nao é igual a g-ésima componente e $g(y)$ de $p(y)$. Logo $p(x) \neq p(y)$. p é contínuo pela propriedade universal, sendo $\pi_f \circ p : X \xrightarrow{p} \prod \mathbb{R} \xrightarrow{\pi_f} \mathbb{R}$ contínua. Assim basta mostrar que P leva abertos em abertos; e para isto basta mostrar que P leva abertos básicos em abertos. Pelo Teorema 12.4 podemos usar imagens inversas $f^{-1}(-1, 1)$ como abertos básicos mas agora $p(f^{-1}(-1, 1)) = \pi_f^{-1}(-1, 1) \cap p(X)$ e este último é um aberto na toplogia induzida em $p(X)$. $\diamondsuit$

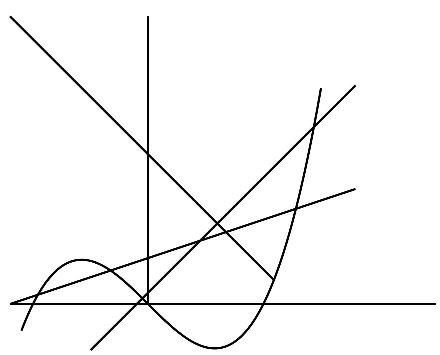
Podemos divertir-nos ca1culando este mergulho para um espaço bem simples. Seja $X = \{\star\}$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ considerado como subconjunto $\Gamma \subset \{\star\} \times \mathbb{R}$ então é um par $(\star, s)$ onde $s \in \mathbb{R}$. Identilicamos assim $C(X)$ com $\mathbb{R}$ por $(\star, s) \leftrightarrow s$; Logo $\prod_{C(X)} \mathbb{R}$ pode ser identif'icado com $\prod_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ e este último é identificável com $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ o espaço de funções $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (todas as funções); esta identificação é $\prod_{\mathbb{R}} \mathbb{R} \ni (r_s) \mapsto r. \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde r é a função $s \mapsto r_s$. Pelas construções precedentes $p(\star)$ é a família $((\star, s)(\star))$ que em $\prod_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ é a família (s) e em $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ é a função $\cdot = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ Então $(\star)$ é mergulhado como $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ no espaço $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Mais brevemente:

$$\begin{array}{ccc} C(x) \leftrightarrow \mathbb{R} & \displaystyle\prod_{C(X)} \mathbb{R} \leftrightarrow \prod_{\mathbb{R}} \mathbb{R} & \displaystyle\prod_{\mathbb{R}} \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ (\star, s) \leftrightarrow s & (r_{(\star,s)} \leftrightarrow (r_s) & (r_s) \leftrightarrow r \end{array}$$

então $p(\star) = ((\star, s)(\star)) \mapsto (s) \mapsto \cdot = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Com o mesmo método vemos que se $X = \{\star_1, \star_2, \ldots, \star_n\}$ então $\prod_{C(X)} \mathbb{R}$ é identificável com $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^n}$ onde pelo mergulho, $\star_k$ tem a imagem π_k a k-ésima projeção $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Reparemos que este mergulho mesmo para espaços triviais é bem envolvido e o espaço $\prod_{C(X)} \mathbb{R}$ extremamente grande. De modo geral X assim está perdido num ambiente enorme. Para sentir melhor este úllimo fato considere este mergulho para a reta: $X \xrightarrow{p} \prod_{C(X)} \mathbb{R}$. Podemos considerar $\prod_{C(X)} \mathbb{R}$ como um espaço vetorial definindo as operações lineares assim: $\alpha(r_f) + \beta(s_f) = (\alpha r_f + \beta s_f)$. Neste espaço vetoria agora a imagem $p(\mathbb{R})$ da reta goza da seguinte propriedade: Nenhuma subvariedade afim (translação de un subespaço vetorial) de dimensão finita contém mais que um número finito de pontos de $p(\mathbb{R})$. Suponha que não fosse assim então existiriam uma coleção finita de pontos definindo a variedade afim $\{\xi \in \prod \mathbb{R} \mid \xi_f = \sum a_j r_f^j + s_f$ para algum $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ de dimensão finita n tal que para uma família *infinita* de pontos $x_\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se $f(x_\alpha) = \sum a_j^\alpha r_f^j + s_f$ para algum a_j^α e *todo* $f \in C(X)$. Introduza as seguintes funções $\phi_j : \{x_\alpha \mid \alpha \in A\} \to \mathbb{R}$ por $\phi_j(x_\alpha) = a_j^\alpha$. Logo$f|\{x_\alpha \mid \alpha \in A\} = \sum r_f^j \phi_j + s_f \cdot 1$ e assim $\{\phi_j, 1\}$ é uma hase para o espaço vetorial $C(\mathbb{R})|\{x_\alpha \mid \alpha \in A\}$ mas este último é de dimensão infinita pois já os polinômios x^k dão um conjunto linearmente independente. A curva $p(\mathbb{R})$ então sempre está se dobrando numa direçõ nova, se entrar numa variedade afim de dimensão finita, imediatamente sai e nunca volta mais que um número finito de vezes. Assim ela está numa "posição geral" em $\prod \mathbb{R}$. Uma situação análoga acontece por exemplo com o gráf'ico do $x^3 - x$ em $\mathbb{R}^2$, qualquer reta só contém um número finito de pontos dele.



Do mesmo jeito a curva parmétrica $t \mapsto (t, t^2, t^3, t^4, \ldots, t^n)$ em $\mathbb{R}^n$ goza da propriedade que qualquer hiperplano de dimensão $n-1$ só contém um número rinito de pontos dela. A curva $p(\mathbb{R})$ em $\prod_{C(X)} \mathbb{R}$ assim comporta-se similarmente; qualquer variedade afim de dimensão finita só pode conter um n úmero finito de pontos de $p(\mathbb{R})$.

Capítulo 13

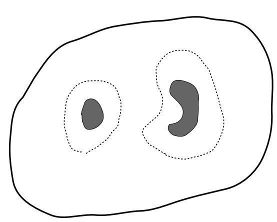
Espaços normais

Estes espaços são úteis por suas propriedades globais (terema de Urysohn e teorema de Tietze) mas como acontece frequentemente a definição é local e as propriedades globais são teoremas.

Definição 13.1 *Um espaço topológico* $(X, \mathcal{T})$ *chama-se* normal $\Leftrightarrow$

(a) *ele é Hausdorff e*

(b) *para todo par* F_1, F_2 *de fechados disjuntos existem vizinhanças abertas* U_1, U_2 *deles tais que* $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. *Em outras palavras podemos separar fechados disjuntos com abertos disjuntos.*



Teorema 13.1 *Todo espaço métrico é normal.*

Demonstração: Considere primeiro a seguinte função: Seja (X, d) um espaço mtŕico e $S \subset X$; defina $d(x, S)$, a distância entre x e S por $d(x, S) = \inf_{z \in S}(d(x, z)$.

Afirmamos:

(a) $x \mapsto d(x, S)$ é contínuo: pela desigualdade triangular tem-se $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, tomando o ínfimo sobre $z \in S$ de ambos os lados concluimos $d(x, S) \leq d(x, y) + d(y, S)$ ou seja $d(x, S) - d(y, S) \leq d(x, y)$ e como o argumento é simétrico em x e y temos $|d(x, S) - d(y, S)| \leq d(x, y)$ e daí a continuidade de $d(\cdot, S)$.

(b) $d(x, S) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{S}$. Sendo $d(x, S) = 0$ concluimos que toda bola $B_r(x)$ contém pontos de S logo $x \in \bar{S}$ e vice-versa.

Considere agora dois fechados F_1, F_2 disjuntos, e as funções $d(x, F_1), d(x, F_2)$. Afirmamos que $U_1 = \{x \mid d(x, F_1) < d(x, F_2)\}$ e $U_2 = \{x \mid d(x, F_2) < d(x, F_1)\}$ sao vizinhanças disjuntas ahertas de F_1 e F_2 respectivamente. Que são disjuntas é óbvio, que sao abertas segue do seguinte: considere $\delta : X \to \mathbb{R}^2$ dado por $x \mapsto (d(x, F_1), d(x, F_2))$ então $U_1 = \delta^{-1}\{(x_1, x_2) \mid x_1 < x_2\}$ e $U_2 = \delta^{-1}\{(x_1, x_2) \mid x_2 < x_1\}$ são imagens inversas de conjuntos abertos por uma função contínua, logo são abertas. Para $x \in F_1$ tem-se $d(x, F_1) = 0$ e sendo $x \notin F_2$ pela propriedade (b) acima tem-se $d(x, F_2) > 0$ logo $F_1 \subset U_1$ e simelarmente $F_2 \subset U_2$. $\diamondsuit$

Teorema 13.2 *Todo espaço compacto Hausdorff é normal.*

Demonstração: Primeiro considere um fechado F e um ponto $x \notin F$. Para todo $y \in F$ existem vizinhanças U_x^y e V_y de x e de y respectivamente tais que $U_x^y \cap V_y = \emptyset$. Sendo F compacto e sendo $F \subset \cup_{y \in F} V_y$ tem-se $F \subset V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \cdots \cup V_{y_n}$ para alguns pontos $y_1, y_2, \ldots, y_n \in F$. Assim $U = U_x^{y_1} \cap U_x^{y_2} \cap \cdots \cap U_x^{y_n}$ e $V = V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \cdots \cup V_{y_n}$ são vizinhanças disjuntas de x e F respectivamente. Agora sejam F_1, F_2 dois fechados disjuntos. Pelo que precede para todo $x \in F_1$ existem vizinhanças abertas disjuntas U_x e V^x de x e de F_2 respectivamente, pela compacidade de F_1 $F_1 \subset U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$ e agora $U = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$ e $V = V^{x_1} \cap \cdots \cap v^{x_n}$ são vizinhanças abertas disjuntas de F_1 e F_2 respectivamente. Assim o espaço é normal. $\diamondsuit$

Vamos precisar da seguinte proposiçao técnica.

Lema 13.1 *Um espaço Hausdorff é normal se e somente se dado qualquer fechado F e vizinhança aberta V dele existe uma vizinhança aberta U de F tal que $F \subset U \subset \bar{U} \subset V$.*

Demonstração:

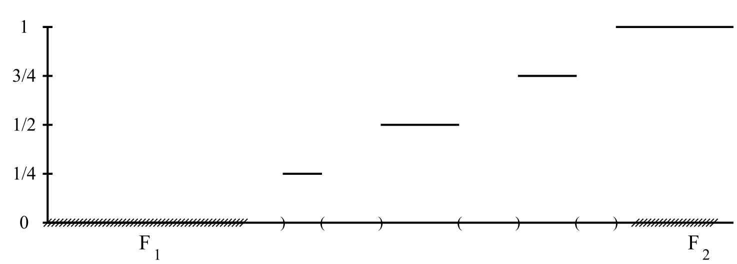
($\Rightarrow$) F e V^c sao fechados disjuntos logo existem vizinhanças abertas disjuntas U e W deles. Sendo $U \cap W = \emptyset$ e $W \supset V^c$, se $x \in \bar{U} \cap W$, W seria uma vizinhança de x e assim teria que ter interseção não vazia com U, logo $\bar{U} \subset W^c \subset V$.

($\Leftarrow$) Sejam F_1, F_2 dois fechados disjuntos, aplique a hipótese a F_1 e F_2^c assim achando um U tal que $F_1 \subset U \subset \bar{U} \subset F_2^c$ temos que U e $\bar{U}^c$ são vizinhanças abertas disjuntas de F_1 e F_2 respectivamente. $\diamondsuit$

Agora demonstramos as propriedades globais de espaços normais.

Teorema 13.3 *(Lema de Urysohn) - Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço normal e F_1, F_2 dois fechados disjuntos, então existe uma função contínua $g : X \to [0,1]$ tal que $g|F_1 = 0$ e $g|F_2 = 1$.*

Demonstração: A idéia da demonstração é achar regiões onde a função construida tem valor $\frac{k}{2^m}$ para todo $k \leq 2^m$ e $m > 0$. Para $m = 0$; $k = 0, 1$ escolhemos vizinhanças disjuntas de F_1 e F_2, para $\frac{1}{2}$ interpomos uma região entre as duas vizinhanças, para $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ nterpomos regiões como no desenho, e assim por diante.



Com esta idéia, levemente modificada por razões técnicas, continuamos com a demonstração. Construimos por indução os conjuntos abertos onde g terá valor $< \frac{k}{2^m}$; sejam $U_{k/2^m}$ esses conjuntos. A indução é em m. Para $m = 0$ seja $U_1 = F_2^c$ e U_0 qualquer conjunto aberto satisfazendo $F_1 \subset U_0 \subset \bar{U}_0 \subset F_2^c$. Sendo $U_{k/2^m}$ definidos até m definimos os $U_{k/2^{m+1}}$. Assim só precisamos definí-los para k ímpar pois para k par já estão definidos, Defina $U_{k/2^{m+1}}$, k ímpar agora como sendo qualquer conjunto que satisfaz $\bar{U}_{k-1/2^{m+1}} \subset U_{k/2^{m+1}} \subset U_{k+1/2^{m+1}}$ obervando que $U_{k-1/2^{m+1}}$ e $U_{k+1/2^{m+1}}$ já são construidos e que $U_{k-1/2^{m+1}} \subset U_{k+1/2^{m+1}}$ é válido por indução.

Defina agora a função g por $g(x) = \begin{cases} 1 & x \in F_2 \\ \inf\{r \mid x \in U_r\} & x \notin F_2 \end{cases}$. Claro $g : X \to [0,1]$, $g|F_1 = 1$ e $g|F_2 = 0$ pois $F_1 \subset U_r$ para todo r. Basta mostrar que g é contínua. Suponha $g(x_0) = y_0 \in [0,1]$ e considere a vizinhança $(y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ de y_0. Agora existem números r_1, r_2 da forma $\frac{k}{2^m}$ tais que $y_0 - \epsilon < r_1 < y_0 < r_2 < y_0 + \epsilon$ (se $y_0 = 0$ ou 1 use só r_2 ou r_1 e modifique levemente o que segue). Considere $U_{r_2} \setminus \bar{U}_{r_1}$ essa é uma vizinhança aberta de x_0 tal que $g(U_{r_2} \setminus \bar{U}_{r_1}) \subset (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$. Assim g é contínua em x_0 e sendo este arbitrário g é contínua. $\diamondsuit$

Corolário 13.1 *Todo espaço normal é completamente regular.*

Demonstração: Aplique o lema de Urysohn ao par de fechados $\{x\}$, F onde $x \notin F$; $\{x\}$ é fechado pela hipótese que o espaço é Hausdorff. $\diamondsuit$

O teorema mais importante sobre espaços normais é o seguite:

Teorema 13.4 *(Tietze) - Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topo1ógico Hausdorff; então $(X, \mathcal{T})$ é normal se e só se toda funçao contínua real definida num subconjunto fechado F tem extensão a uma função contínua no espaço todo.*

Em outras palavras, se $F \subset X$ é fechado e $f : F \to \mathbb{R}$ é contínua, existe um $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $\hat{f}|F = f$ e $\hat{f}$ contínua.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dotted, "\hat{f}"] & \\ F \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Note que a suposição que F é fechado é importante. O Exemplo 5.12 mostra que sem ela o teorema nao pode ser verdadeiro.

Antes de dar a demonstração precisamos de um lema de interesse geral.

Lema 13.2 *Seja (X, T) um espaço topológico e f_k uma sequência de funções contínuas $f_k : X \to \mathbb{C}$. Suponha que existem constantes M_k tais que $|f_k(x)| \leq M_k \ \forall\, x$ e $\sum M_k < \infty$. Então a função f definida pela série $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ é contínua.*

Demonstração: Seja $x \in X$, e $\epsilon > 0$. Existe um inteiro N tal que $\sum_{N+1}^{\infty} M_k < \epsilon/2$. Como toda função f_k, $k = 1, 2, \ldots, N$ é contínua existe uma vizinhança V de x_0 tal que $y \in V \Rightarrow |f_k(y) - f_k(x_0)| < \epsilon/2N$ $k = 1, 2, \ldots, N$ Aasim $y \in V \Rightarrow |f(y) - f(x_0)| \leq \sum_{k=1}^{N} |f_k(y) - f_k(x_0)| + \sum_{N+1}^{\infty} M_k < \epsilon$ logo f é contínua em x_0 e sendo este arbitrário f é contínua. $\diamondsuit$

Demonstração: (*Tietze's theorem*)

($\Rightarrow$) Suponha primeiro que $f : F \to (-1, 1)$. Considere os conjuntos $F_1 = \{x \,|\, f(x) \geq 1/3\}$, $F_2 = \{x \,|\, f(x) \leq -1/3\}$. Estes são conjuntos fechados disjuntos e pelo lema de Urysohn existe uma função contínua $h_1 : X \to [-1/3, 1/3]$ tal que $h_1|F_1 = 1/3$, $h_1|F_2 = -1/3$. Assim temos $|h_1(x)| \leq 1/3$, $|f(x) - h_1(x)| \leq 2/3$ para $x \in F$. Agora aplique o mesmo raciocínio a $f(x) - h_1(x) : F \to [-2/3, 2/3]$ achando uma função contínua h_2 tal que $|h_2(x)| \leq (\frac{1}{3})^2$ e $|f(x) - h_1(x) - h_2(x)| \leq (\frac{2}{3})^2$, $x \in F$. Assim por indução podemos construir funções h_n satisfazendo $|h_n(x)| \leq (\frac{1}{3})^n$; e $|f(x) - h_1(x) - h_2(x) + \cdots - h_n(x)| \leq (\frac{2}{3})^n$, $x \in F$ Como $\sum (\frac{1}{3})^n < \infty$ o Lema 13.2 mostra que $\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x)$ é contínua e a desigualdade anterior mostra que $\tilde{f}(x) = f(x)$ para $x \in F$. Logo $\tilde{f}$ é uma extensão. Considere primeiro o conjunto $L = \{x \,|\, |\tilde{f}| \geq 1\}$. L é fechado e disjunto de F pois $|f(x)| < 1$ por hipótese e $\tilde{f} = f$ em F. Seja g a função de Urysohn $g : X \to [0, 1]$ tal que $g|F = 1$, $g|L = 0$ Defina $\hat{f}(x) = g(x)\tilde{f}(x)$, como $g|F = 1$, $\hat{f}(x)$ também é uma extensão e $|\hat{f}(x)| < 1$ pois para qualquer ponto x onde $g(x) \neq 0$ tem-se $|\tilde{f}(x)| < 1$.

Suponha agora que $f : F \to \mathbb{R}$ é contínua. A função $g(x) = 2 \operatorname{arc\,tg}(\mathrm{f(x)})$ é contínua e tem valores em $(-1, 1)$. Ache uma extensão $\hat{g}$ de g com $|\hat{g}(x)| < 1$ como acima. Agora $f(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} g(x))$ é uma extensão contínua de f.

($\Leftarrow$) Sejam F_1 e F_2 dois conjunto disjutno e $F = F_1 \cup F_2$. Seja $f : F \to \mathbb{R}$ dada por $f|F_1 = 0$ e $F|F_2 = 1$. Esta função é contìnua e portanto por hipótese possui uma extensão contìnua $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$. Sejam agora $U_1 = \{x \,|\, f(x) < 1/2\}$ e $U_2 = \{x \,|\, f(x) > 1/2\}$. São abertos disjutnto, $F_1 \subset U_1$ e $F_2 \subset U_2$. Logo X é noraml. $\diamondsuit$

Capítulo 14

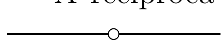
Espaços métricos completos

Definição 14.1 *Seja* (X, d) *um espaço métrico. Uma sequência* x_n *chama-se* Cauchy *se e somente se dado* $\epsilon > 0$ *existe um* N *tal que* $n, m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Em outras palavras, a partir de um certo número N todos os pontos x_n são pertos entre si. Também podemos dizer que a rede $d(x_n, x_m)$, $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ converge a zero.

Teorema 14.1 *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração: Suponha $x_n \to x$ então $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x)$ mas considerando $d(x_n, x)$ e $d(x_m, x)$ como redes indexadas por $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ temos $d(x_n, x) \to 0$ e $d(x_m, x) \to 0$ logo $d(x_n, x_m) \to 0$. $\diamondsuit$

A recíproca nao é necessariamente verdadeira. Considere $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e a sequência $\frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Como $\frac{1}{n} \to 0$ em $\mathbb{R}$, essa sequência é Cauchy e logo é Cauchy em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ também, mas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ela nao converge. Do mesmo jeito as aproximações decimais ao número π: $3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; \ldots$ é uma sequência de Cauchy no espaço $\mathbb{Q}$ de números racionais mas não converge aí. Assim uma sequência de Cauchy não convergente refere-se a um "buraco" existindo no espaço.

Definição 14.2 *m espaço métrico chama-se* completo *se e somente se toda sequência de Cauchy converge.*

Teorema 14.2 *Um espaço métrico compacto é completo.*

Demonstração: Seja x_n uma sequência de Cauchy. Como X é compacto existe uma subrede $(x_{n_\alpha})_{\alpha \in A}$ convergente; seja $x_{n_\alpha} \to x$. Assim $\mathbb{N} \times A \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$; $(m, \alpha) \to (m, n_\alpha)$ é cofinal e temos $d(x_n, x) \leq d(x_m, x_{n_\alpha}) + d(x_{n_\alpha}, x)$ mas agora como redes indexados por $\mathbb{N} \times A$, $d(x_{n_\alpha}, x) \to 0$ e $d(x_m, x_{n_\alpha}) \to 0$ sendo x_n Cauchy. Logo $d(x_m, x) \to 0$ e $x_m \to x$. $\diamondsuit$

Teorema 14.3 $\mathbb{R}^n$ *é completo.*

Demonstração: Seja x_n uma sequência de Cauchy. Então existe um N tal que $n, m \geq N \Rightarrow d(x_n.x_m) < 1$. Mas agora se $R = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots \|x_N\|\} + 1$ onde $\|x\| = d(0, x)$, temos $x_n \in \overline{B_R(0)}$ para todo n. Logo todo x_n pertence ao conjunto fechado limitado $\overline{B_R(0)}$ e este sendo compacto pelo teorema anterior concluimos que x_n converge. $\diamondsuit$

Seja Y agora um espaço topo1ógico qualquer e defina $Cb(Y, \mathbb{R})$ como sendo o espaço de todas as funções contínuas limitadas $f : Y \to \mathbb{R}$. Definimos em $Cb(Y, \mathbb{R})$ a métrica $d(f, g) = \sup_{y \in Y} |f(y) - g(y)|$.

Teorema 14.4 $Cb(Y, \mathbb{R})$ *é completo.*

Demonstração: Seja f_n uma sequência de Cauchy. Então $\forall\, y \in Y$ tem-se $|f_n(y) - f_m(y)| \leq \sup_{y \in Y} |f_n(y) - f_m(y)| = d(f_n, f_m) \to 0$ logo $f_n(y)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ e este sendo completo concluimos que $f_n(y)$ converge para um número que chamaremos de $f(y)$. Precisamos mostrar que $y \mapsto f(y)$ é limitado, contínuo, e $f_n \to f$. Seja N tal que $n, m \geq N \Rightarrow d(f_n, f_m) < \epsilon$, então $\forall\, y\, |f_n(y) - f_m(y)| < \epsilon$ e passando ao limite $m \to \infty$ temos $n > N \Rightarrow |f_n(y) - f(y)| < \epsilon$. Disto segue $|f(y)| < \epsilon + |f_n(y)|$ e assim f é limitado pois f_n o é. Podemos concluir também que $\lim_{n \to \infty} \sup_{y \in Y} |f_n(y) - f(y)| = 0$, logo se mostrarmos que f é contínuo já teremos $f_n \to f$. Suponha $y_k \to y$ então $|f(y_k) - f(y)| \leq |f(y_k) - f_n(y_k)| + |f_n(y_k) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$. Fixamos n tão grande que $|f_n(y) - f(y)| < \epsilon/3$ para todo y, agora existe um K tal que $k \geq K \Rightarrow |f(y_k) - f(y)| < \epsilon/3$ pela continuidade de f_n. Logo $k \geq K \Rightarrow |f(y_k) - f(y)| < \epsilon$ e assim f é contínuo em y e este sendo arbitrário conlcuimos que f é contínuo. $\diamondsuit$

Teorema 14.5 *Seja* (X, d) *um espaço métrico completo. Se* $F \subset X$ *é um fechado então* F *também é completo.*

Demonstração: Seja x_n uma sequência de Cauchy em F, como X é completo $x_n \to x$ em X mas então sendo $x_n \in F$ temos $x \in \bar{F} = F$ logo x_n converge em F. $\diamondsuit$

Agora mostramos que um espaço métrico não completo pode ser visto como um subespaço denso de um espaço métrico completo. Assim podemos preencher todos os buracos no espaço.

Teorema 14.6 *Seja (X, d) um espaço métrico. Então existe um espaço métrico cumpleto $(\tilde{X}, \tilde{d})$ e uma injeção* isométrica, densa $i : X \to \tilde{X}$. *Isto é $\tilde{d}(ix, iy) = d(x, y)$ e $\overline{(iX)} = \tilde{X}$.*

Demonstração: O espaço $Cb(X, \mathbb{R})$ é completo. Considere um $x_0 \in X$, ponto a ficar fixo. Para todo $x \in X$ defina a função $\delta_x : X \to \mathbb{R}$ por $\delta_x(y) = d(x, y) - d(x_0, y)$. Agora $\sup|\delta_x(y)| = \sup|d(x, y) - d(x_0, y| \leq d(x, x_0)$ pela desigualdade triangular. Logo δ_x é limitada e sendo obviamente contínua, $\delta_x \in Cb(X, \mathbb{R})$. Seja $\tilde{d}$ a métrica em $Cb(X, \mathbb{R})$. Tem-se $\tilde{d}(\delta_x, \delta_z) = \sup_{y \in X} |d(x, y) - d(z, y)| = d(x, z)$ pois como já foi visto $\tilde{d}(\delta_x, \delta_z) \leq d(x, z)$ mas para $y = z$ acima temos exatamente $d(x, y)$. Logo a injeçõ $i : x \to \delta_x$ é isométrico. Considere então em $Cb(X, \mathbb{R})$ o fecho $\tilde{X} = \overline{(iX)}$. Pelos teoremas anteriores este espaço é completo e assim nós achamos o que procuramos. $\diamondsuit$

O espaço $(\tilde{X}, \tilde{d})$ chama-se *completamento* de X. Mais adiante mostraremos que ele é essencialmente único.

Exemplo 14.1

(a) $[0, 1]$ *é o completamento de* $(0, 1)$ *na métrica usual.*

(b) $\mathbb{R}$ *é o completamento de* $\mathbb{Q}$ *na métrica usual.*

(c) *Pelo teorema de Stone-Weierstrass* $C([0, 1], \mathbb{R})$ *é o completamento na métrica usual do espaço de polin3mios definidos em* $[0, 1]$.

Definição 14.3 *Sejam X e Y espaços métricos, e $f : X \to Y$ uma aplicação. Dizemos que f é* uniformemente contínua *se dado $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$.*

Notemos que para y fixo isso implica na continuidade de f em y, logo f é contínua. Além da continuidade a continuidade uniforme afirma que podemos para ϵ dado arranjar um δ que serve para *todo* $y \in X$. Continuidade por si só daria um δ que varia com y.

Lema 14.1 *Uma aplicação uniformemente contínua leva sequências de Cauchy em sequência de Cauchy.*

Demonstração: Seja $f : X \to Y$ uniformemente contínua, e x_n sequênciá de Cauchy em X. Seja $\epsilon > 0$ dado e δ tal que $d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$. Existe um N tal que $n, m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \delta$ logo $n, m \geq N \Rightarrow d(f(x_n), f(x_m)) \leq \epsilon$ e sendo ϵ arbitrário concluimos que $f(x_n)$ é Cauchy. $\diamondsuit$

Exemplo 14.2 *Considere* $(0,1) \xrightarrow{f} (1,\infty)$ *dado por* $f(x) = \frac{1}{x}$. *A sequência* $\frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *é Cauchy em* $(0,1)$ *mas* $f(n) = n$ *nao é Cauchy em* $(1,\infty)$. *Logo* f *não é uniformemente contínua.*

Em certos casos a continuidade uniforme segue da mera continuidade.

Teorema 14.7 *Seja* $f : X \to Y$ *uma aplicação contínua entre espaços métricos. Se* X *é compacto então* f *é uniformemente contínua.*

Demonstração: Como f é contínua, para $\epsilon > 0$ existe para todo $x \in X$ um $\delta_x > 0$ tal que $y \in B_{\delta_x}(x) \Rightarrow d(y,x) < \delta_x \Rightarrow d(f(y), f(x)) < \epsilon/2$. Como X é compacto existe um número finito de pontos $x_1, \ldots, x_n$ tais que as bolas $B_{\delta_{x_i}/3}(x_i)$ cobrem X. Seja $\delta = \min(\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n})$. Seja agora $d(x,y) < \delta$ e considere o ponto x. Como as bolas $B_{\delta_{x_i}/3}$ cobrem X existe um x_j tal que $d(x, x_j) < \delta_{x_j}/3 < \delta_{x_j}$. Mas então $d(y, x_j) < \delta + \delta_{x_j}/3 < \delta_{x_j}$ logo $d(f(y), f(x)) \leq d(f(y), f(x_j)) + d(f(x), f(x_j)) \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$ $\diamondsuit$

Disto segue por exemplo que a função $\frac{1}{x}$ em $(0,1)$ nao tem uma extensão contínua a $[0,1]$ pois se tiver essa extensão seria uniformemente contínua e logo seria uniformement contínua o que ela não é pelo exemplo anterior.

Podemos agora mostrar um teorema da existência de uma extensão ao fecho de um subconjunto.

Teorema 14.8 *Sejam* X, Y *espaços métricos e* Y *completo. Seja* $S \subset X$ *um subconjunto e* $f : S \to Y$ *uma aplicação uniformemente contínua. Então* f *tem uma extensão uniformemente contínua única* $\hat{f}$ *ao* $\bar{S}$.

Demonstração: Seja $x \in \bar{S}$ então existe uma sequência $s_n \in S$ tal que $s_n \to x$. Logo s_n é Cauchy e sendo f uniformemente contínua, $f(s_n)$ é Cauchy. Sendo Y completo $f(s_n)$ converge a um ponio que chamaremos de $\hat{f}(x)$. Se também $t_m \to x$, $t_m \in S$ então $d(t_n, s_n) \to 0$ mas f sendo uniformemente contínua concluimos $d(f(t_n), f(s_n)) \to 0$ logo $f(t_n) \to \hat{f}(x)$ também. Assim $\hat{f}(x)$ é bem definido e dá uma extensão de f. Se $\tilde{f}$ for uma outra extensão contínua teríamos por continuidade para $x \in \bar{S}$ que

$\tilde{f}(x) = \lim \tilde{f}(s_n) = \hat{f}(x)$. Logo a extensão é única. Sejam agora ϵ e δ como na Definição 14.3. Sejam $x, y \in \bar{S}$ com $d(x,y) < \delta/3$ e sejam $x_n \to x$ e $y_n \to y$. existe um inteiro N tal que $n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \delta/3$ e $d(y_n, y) < \delta/3$. Disto segue que para $n \geq N$ temos $d(x_n, y_n) < \delta$ e logo $|f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon$. Passando ao limite temos $|\hat{f}(x) - \hat{f}(y)| \leq \epsilon$. Assim $\hat{f}$ é uniformemente contínua. $\diamondsuit$

Esse teorema é usado muito para a construção de várias aplicações em análise.

Exercício 14.1 *(Unicidade de completamento). Suponha $i_1 : X \to \tilde{X}_1$ e $i_2 : X \to \tilde{X}_2$ sao duas isometrias densas de um es paço métrico em espaços completos X_1 e X_2 respectivamente. Mostre que existe uma isometria $\phi : X_1 \to X_2$ e um diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X}_1 \arrow[dd, "\phi"] \\ X \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & \\ & \tilde{X}_2 \end{tikzcd}$$

Note que o teorema de Tietze do capítulo anterior dá condiçoes de extensão de uma função de um subconjunto fechado ao espaço todo. O teorema anterior dá condições de extender uma :função de um conjunto qualquer ao seu fecho e assim pode ser considerado um passo anterior à aplicação do teorema de Tietze.

Capítulo 15

Compactificações

Definição 15.1 *Uma* compactificação *de um espaço topológico* $(X, \mathcal{T})$ *é um mergulho* $f : X \to K$ *num espaço compacto tal que* $f(X)$ *é denso em* K*. Isto é* $\overline{f(X)} = K$*.*

Exemplo 15.1

(a) *A inclusão* $(0,1) \subset [0,1]$ *e o mergulho* $(0,1) \to S^1$ *dado por* $x \to e^{2\pi i x}$ *são compactificações. No primeiro caso* K *tem mais dois pontos e no segundo mais um.*

(b) *O mergulho* $x \to \left(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$ *do intervalo* $X = \left(1, \frac{1}{\pi}\right]$ *no espaço* $K = \{0\} \times [-1,1] \cup \left\{\left(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) \mid 0 < x \leq \frac{1}{\pi}\right\}$ *é uma compactificação pois* K *é o fecho do gráfico e é compacto.*

Neste último caso o número de novos pontos "ideais" é infinito: todo ponto em $\{0\} \times [-1,1]$ é novo. As vizinhanças destes pontos deixam em X filtros que nao convergem em X mas que apontam para estes pontos ideais.

Aqui vamos estudar dois métodos gerais de compactificar espaços topológicos. Estudaremos a compactificação de Alexandrov (ou compactificação por um ponto) e a compactificação de Stone-Cech de espaços completamente regulares. Num certo sentido a primeira é a compactificação mínima e a segunda máxima.

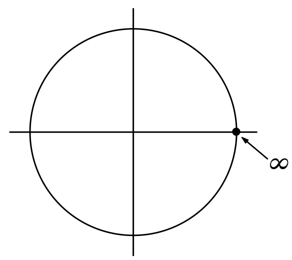
Definição 15.2 *Seja* $(X, \mathcal{T})$ *um espaço topológiço não compacto. A* compactificação de Alexandrov *de* $(X, \mathcal{T})$ *é o espaço topológico construido da seguinte maneira: Seja* ∞ *um ponto que não pertence a* X *e seja* $\dot{X} =$

$\{\infty\} \cup X$ *Defina a seguinte topologia em* $\dot{X}$*: todo aberto de* X *é um aberto de* $\dot{X}$*. Todo conjunto do tipo* $\{\infty\} \cup K^c$ *onde* $K \subset X$ *é um* compacto fechado *é um aberto de* X*;* X *com esta topologia é a compactificação de Alexandrov.*

Em outras palavras, todo ponto de X tem base de vizinhanças usual e a base para as vizinhanças de ∞ é dada pelos conjuntos de tipo: $\{\infty\}$ unido com um complemento de um compacto fechado em X.

Exemplo 15.2

(a) *O círculo* S^1 *é a compactif'icação de Alexandrov do intervalo* $(0, 1)$*:*



o ponto ∞ *aqui é identificável com* 1 *no mergulho* $x \mapsto e^{2\pi i x}$ *de* $(0, 1)$ *em* $S^1 \subset \mathbb{C}$*.*

(b) *O intervalo* $[0, 1]$ *é a compactif'iração de Alexandrov do intervalo* $(0, 1]$ *semifechado. O ponto* ∞ *é identif'icável com* 0*.*

(c) S^2 *é a compactificação de Alexandrov de* R^2 *e sendo este último identificável com* $\mathbb{C}$ *vemos que a esféra de Riemann é a compactificação de Alexandrov do plano complexo.*

(d) *O espaço* $X = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \parallel n = 1, 2, 3, \dots\right\} \subset \mathbb{R}$ *é a compactificação de Alexandrov do conjunto* $\left\{\frac{1}{n} \,|\, n = 1, 2, 3, \dots\right\}$ *mas sendo este último homeomorfo a* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ *com a topologia discreta vemos que* X *é a compactificação de Alexandrov de* $\mathbb{N}$*.*

(e) *Mais geralmente se* X *é um conjunto infinito com topologia discreta, as vizinhanças de* ∞ *na compactificação de Alexandrov de* X *sao formadas por conjuntos de tipo:* $\{\infty\}$ *reunido com um complemento de um subconjunto finito de* X*. Este espaço nao é mais discreto.*

(f) *Considere a reta* $\mathbb{R}$ *como topologia gerada por abertos de tipo* (r, ∞). *O único fechado compacto é* $\emptyset$ *e logo a única vizinhança de* ∞ *na compactificação de Alexandrov é* $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Não confunda o ∞ na compactificação de Alexandrov com qualquer outro uso do símbolo. A compactificação de Alexandrov de $\mathbb{R}$ é S^1 e o ponto ∞ nao corresponde nem ao $+\infty$ nem ao $-\infty$ da reta extendida $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ que é uma compactificação a dois pontos no uso comum desta reta extendida.

Devemos demonstrar que a compactificação de Alexandrov é de fato uma compactificação.

Teorema 15.1 *A construção de Alexandrov produz uma compactificação de* $(X, \mathcal{T})$.

Demonstração:

A topologia induzida por $\dot{X}$ em X é a topologia dada $\mathcal{T}$: um aberto da topologia induzida é da forma $U \cap X$ onde U é um aberto de $\dot{X}$, mas então ou $U = V$ um aberto de X ou $U = \{\infty\} \cup G$ onde G é complemento de um compacto fechado de X (e então G é aberto). Assim $U \cap X$ ou é V ou é G ambos abertos e sendo V um aberto qualquer de X temos que a topologia induzida é exatamente $\mathcal{T}$. Logo a inclusão $X \subset \dot{X}$ é um mergulho.

Para mostrar que $\bar{X} = \dot{X}$ só basta mostrar que $\infty \in \bar{X}$. Mas a única possibilidade para $\infty \notin \bar{X}$ é $\{\infty\}$ ser aberto mas então X seria compacto que não é verdade por hipótese.

Mostraremos que $\dot{X}$ é compacto. Seja $\dot{X} = \cup \mathcal{O}_\alpha$ uma cobertura aberta de $\dot{X}$. Logo ∞ pertence a algum dos $\mathcal{O}_\alpha$; seja ele $\mathcal{O}_{\alpha_0}$, mas então $\mathcal{O}_{\alpha_0} = \{\infty\} \cup K^c$ onde K é compacto fechado em X. Assim $K \subset \cup_{\alpha \neq \alpha_0} \mathcal{O}_\alpha$ e sendo K compacto existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que $K \subset \mathcal{O}_{\alpha_1} \cup \cdots \cup \mathcal{O}_{\alpha_n}$ logo $\dot{X} \subset \mathcal{O}_{\alpha_0} \cup \mathcal{O}_{\alpha_1} \cup \cdots \cup \mathcal{O}_{\alpha_n}$ mostrando que ele é compacto. $\diamondsuit$

.

Observação: A construção de Alexandrov pode ser feita também com um espaço já compacto, mas então ∞ seria um ponto aberto e nós perdemos $\bar{X} = \dot{X}$. De vez em quando é útil considerar esta situação também.

Definição 15.3 *Seja* $(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$ *uma aplicação contínua, dizemos que* f tem limite no infinito *e escrevemos* $y_0 = \lim_{x \to \infty} f(x)$ *se* f *tem extensão contínua* $\hat{f}$ *a compactificação de Alexandrov* $\dot{X}$ *de* X *e se então* $\hat{f}(\infty) = y_0$.

Exemplo 15.3

(a) *A função* $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tem limite* 0 *no infinito. Repare bem que este infinito não é o* $+\infty$ *da reta extendida* $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, *é o* ∞ *de Alexandrov; assim a função* $x \mapsto$ *arc tg* x *não tem limite no infinito sendo* $\lim_{x \to +\infty}$ *arc tg* $x = \pi/2$, $\lim_{x \to -\infty}$ *arc tg* $x = -\pi/2$.

(b) *Seja* $\dot{\mathbb{C}}$ *a esfera de Riemann (compactificação de Alexandrov do plano complexo) então têm-se para funções* $\mathbb{C} \to \dot{\mathbb{C}}$:

$$\lim_{z \to \infty} \frac{1}{z} = 0, \quad \lim_{z \to \infty} x^2 = \infty.$$

Note que aqui $\frac{1}{0}$ *é deíinido como* ∞. *Na teoria de variáveis complexas o espaço* $\dot{\mathbb{C}}$ *faz um papel muito importante.*

Suponha que X nao é compacto.

Temos um critério simples para f ter limite no infinito. O filtro de vizinhanças de ∞ em $\dot{X}$ deixa em X o filtro de complementos de compactos fechados. Seja $\mathfrak{F}$ este filtro. Então $y_0 = \lim_{x \to \infty} f(x)$ se e só se $y_0 = \lim f(\mathfrak{F})$. Ou mais simplesmente $y_0 = \lim_{x \to \infty} f(x) \Leftrightarrow$ para toda vizinhança V de y_0 existe um compacto fechado K em X tal que $f(K^c) \subset V$. Se isto acontece podemos então definir $\hat{f}$ por $\hat{f}(\infty) = y_0$, isto dá uma aplicação contínua $X \to Y$ e reciprocamente se $\hat{f}$ existe ele é contínuo em ∞ e logo o critério acima é satisfeito.

Finalmente verificamos quando a compactificação de Alexandrov é Hausdorff.

Teorema 15.2 *A compactificação* $\dot{X}$ *de Alexandrov de um espaço não compacto* $(X, \mathcal{T})$ *é Hausdorff se e somente se*

(a) X *é Hausdorff,*

(b) *todo ponto em* X *tem uma vizinhança compacta.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha $\dot{X}$ é Hausdorff, sendo $X \subset \dot{X}$ com a topologia induziua, X é Hausdorff. Sejam $x \in X$, $\infty \in \dot{X}$, sendo $\dot{X}$ Hausdorff existem vizinhanças abertas V_x e V_∞ tal que $V_x \cap V_\infty = \emptyset$ mas então $V_x \subset V_\infty^c$. Sendo V_∞ um aberto que contém ∞, V_∞^c é um compacto em X e sendo $V_x \subset V_\infty^c$ uma vizinhança de x. este compacto é uma vizinhança de x.

($\Leftarrow$) Só basta mostrar que podemos separar qualquer ponto $x \in X$ de ∞ mas se K é uma vizinhança compacta de x (K é fechado pois X é Hausdorff). K^o e $K^c \cup \{\infty\}$ são vizinhanças de x e de ∞ respectivamente e $K^o \cap K^c = \emptyset$ logo $\dot{X}$ é Hausdorff. $\diamondsuit$

Definição 15.4 *Um espaço topológico que tem uma vizinhança compacta para todo ponto chama-se de* localmente compacto*.*

Exemplo 15.4

(a) *Qualquer compacto é localmente compacto, pois o espaço dado é vizinhança de qualquer ponto.*

(b) $\mathbb{R}^n$ *é localmente compacto pois toda bola fechada* $\overline{B_r(x)}$ *é uma vizinhança compacta de* x*.*

(c) *Se* X *é infinito o espaço* $\mathbb{R}^X$ *com a topologia fraca não é localmente compacto. Identificando* R^X *com* $\prod_X \mathbb{R}$ *com a topologia produto vemos que toda vizinhança* V *satisfaz* $\pi_x(V) = \mathbb{R}$ *exceto para um número finito de pontos* x*. Assim* V *nao pode ser compacto pois sendo todo* π_x *contínua a imagem* $\pi_x(V)$ *teria que ser compacta para todo* x *o que contradiz a observação acima.*

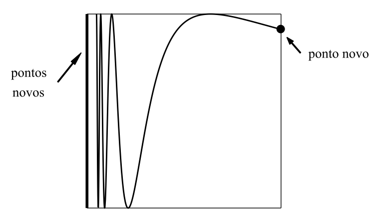
Os espaços localmente compactos são extremamente importantes, muitos resultados valem só para eles. Assim tem uma ampla teoria desenvolvida sobre eles. De modo geral porém os espaços de funções que se encontram em análise não são localmente compactos e isso é uma fonte de muitas dificuldades.

Mostramos agora um outro tipo de compactificação.

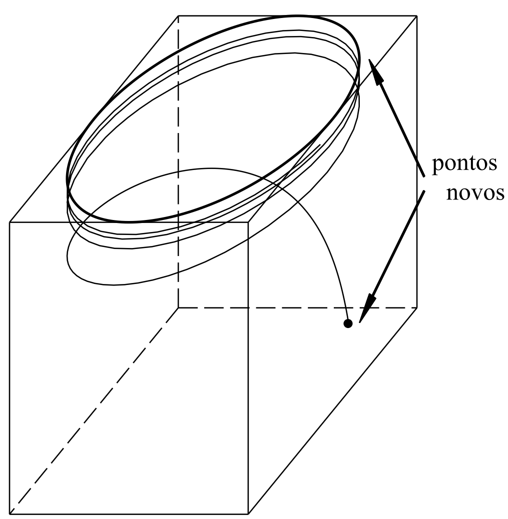
Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço completamente regular. Como já mostramos a aplicação $X \xrightarrow{p} \prod_{C(X)} \mathbb{R} : x \mapsto (f(x))$ é um mergulho. Afirmamos que se em vez de $C(X)$ usarmos $C(X, [0,1])$, o espaço de funções contínuas $X \to [0,1]$ a aplicação também é mergulho (m é definida da mesma maneira como p, use toda $x \to (f(x))$ como coordenada). Para ver isso considere $\mathbb{R} \xrightarrow{h} (0,1) \overset{i}{\hookrightarrow} [0,1]$ onde $h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{arc tg}\, x$ é um homeomorfismo, e i é a inclusão. Logo $i \circ h$ é um mergulho e assim pela propriedade universal $\prod_{C(X)} \mathbb{R} \xrightarrow{\prod i \circ h} \prod_{C(X,[0,1])} [0,1]$ é um mergulho. Então $X \xrightarrow{p} \prod_{C(X)} \mathbb{R} \xrightarrow{\prod i \circ h} \prod_{C(X,[0,1])} [0,1]$ é um mergulho sendo ele a composição de dois mergulhos.

Considere agora a composição $X \xrightarrow{p} \prod_{C(X)} \mathbb{R} \to \prod_{C(X,[0,1])}[0,1] \xrightarrow{\pi_f} [0,1]$ isto é, $x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{arc tg}\,(f(x))$ que é uma função $X \to [0,1]$. Então achamos um mergulho usando só uma família de funções $X \to [0,1]$ e por uma discussão paralela à demonstração do Lema 12.1 m é um mergulho. Mas agora $\prod_{C(X,[0,1])}[0,1]$ é compacto e então o fecho $\overline{m(X)}$ de $m(X)$ é compacto e pela própria construção sendo m um mergulho $X \xrightarrow{m} \overline{m(X)}$ é uma compactificação. Esta é a compactificação de Stone-Čech e é usual escrever $\beta(X)$ para $\overline{m(X)}$.

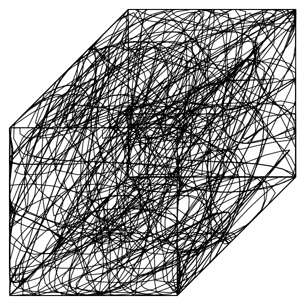
Considere os seguintes três passos na construção de $\beta((0.1)$. Seja $f_1 : (0,1) \to [0,1]$ dado pela inclusão $f_1(x) = x$, então $(0,1) \to [\!\longleftrightarrow\!]$ neste mergulho aparecem dois pontos novos ideais (i.e., no fecho da imagem). Considere agora $f_2 : (0,1) \to [0,1]$ dado por $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sen}\,\frac{1}{x}$ assim temos $(f_1, f_2) : (0,1) \to [0,1]$; $x \mapsto \left(x, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sen}\,\frac{1}{x}\right)$ com imagem



Juntando mais uma função $f_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{1}{x}$ a imagem no cubo $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ é uma espiral tendo numa face um círculo de pontos novos no fecho da imagem.



Imagine repetindo isto até esgotar todas as funções contínuas $(0,1) \to [0,1]$. Assim sempre com cada passo acrescentamos a possibi1idade de ter mais pontos novos, e no final das contas $(0,1)$ encontra-se num cubo de dimensão infinita enrolado dentro numa maneira complicada e cercado por uma infinidade de pontos novos no fecho



A compactificação de Stone-Cech satisfaz a seguinte propridade universal.

Teorema 15.3 *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço completamente regular e K um espaço compacto Hausdorff. Suponha que temos uma aplicação contínua $\phi : X \to K$ então*

(a) *ϕ tem uma extensio única $\hat{\phi} : \beta(X) \to K$ contínua*

(b) *se ϕ é uma compactificação então $\hat{\phi}$ é sobrejetora e $K \simeq \beta(X)/E[\hat{\phi}]$ onde $E[\hat{\phi}]$ é a relação de equivalência definida em $\beta(X)$ por $\hat{\phi}$.*

A segunda parte deste teorema diz que $\beta(X)$ é a compactificação Hausdorff maior, qualquer outra pode ser obtida identificando pontos de $\beta(X)$. Evidentemente só os novos pontos ideais sofrem identificações nao triviais pois sendo ϕ um mergulho neste caso, todo ponto de X tem $\{x\}$ para sua classe de equivalência respeito a $E[\hat{\phi}]$.

Demonstração: Sendo K um espaço compacto Hausdorff ele é normal pelo Teorema 13.2, e logo completamente regular pelo Corolário 13.1. Sendo ele já compacto a compactificaçio de Stone-Cech é um homeomorfismo. Logo nós temos o diagrama onde ϕ^* será construida brevemente.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "m_X"'] & K \arrow[d, "m_K"] \\
\beta(X) & \beta(K) \\
\cap & \cap \\
\prod\limits_{C(X,[0,1]} [0,1] \arrow[r, "\phi^*"] & \prod\limits_{C(K,[0,1]} [0,1]
\end{tikzcd}$$

Definimos ϕ^* por $\phi^*(r) = (r_{h\circ\phi})$ onde $r \in \prod_{C(X,[0,1]}[0,1]$ e $h : K \to [0,1]$. Para entender esta fórmula lembramos que r é uma família (r_f) de números onde o índice é uma função $f \in C(X,[0,1])$. Ora, $\phi^*(r)$ tem que ser uma família $s = (s_h)$ de números onde o índice é uma função $h \in C(K,[0,1])$, mas dando tal h a composição $h \circ \phi : X \overset{\phi}{\to} K \overset{h}{\to} [0,1]$ é um índice em $C(X,[0,1])$ logo faz sentido definir s por $s_h = r_{h\circ\phi}$ A firmamos que ϕ^* é contínua pois pela propriedade universal só precisamos mostrar que $\pi_k \circ \phi^*$ é contínua para toda projeção $\prod_{C(K,[0,1])}[0,1] \overset{\pi_k}{\to} [0,1]$ mas $\pi_k \circ \phi^*((r_f)) = \pi_k((r_{h\circ\phi})) = r_{k\circ\phi} = \pi_{k\circ\phi}((r_f))$ e então $\pi_k \circ \phi^* = \pi_{k\circ\phi}$ onde esta última projeção é $\prod_{C(X,[0,1])}[0,1] \overset{\pi_{k\circ\phi}}{\to} [0,1]$ e sendo esta contínua concluimos que ϕ^* é contínua.

Agora mostramos que $\phi^*\circ m_X = m_K\circ\phi$; de fato, $\phi^*\circ m_X(x) = \phi^*((f(x))) = (h \circ \phi(x)) = (h(\phi(x))) = m_K(\phi(x)) = m_K \circ \phi(x)$. Logo ϕ^* leva $m(X)$ em $m(K)$. Seja agora $r \in \beta(X)$. Como $m(X)$ é denso em $\beta(X)$ existe uma rede $r_\alpha \to r$, $r_\alpha \in m(X)$. Sendo ϕ^* contínua $\phi^*(r_\alpha) \to \phi^*(r)$ mas $\phi^*(r_\alpha) \in m(K)$ e este sendo compacto é fechado em $\prod_{C(X,[0,1])}[0,1]$ logo $\phi^*(r) \subset m_K(K)$ Assim $\phi^*(\beta(X)) \subset m_K(K)$ e agora podemos definir $\hat{\phi}$ por $m_K^{-1} \circ \phi^* : \beta(X) \to K$. Que isto é uma extensio se vê assim: dado $x \in X$, $\hat{\phi} \circ m_X(x) = m_K^{-1} \circ \phi^* \circ m_X(x) = m_K^{-1} \circ m_K \circ \phi(x) = \phi(x)$. Que esta extensio é única segue do fato que $m(X)$ é denso em $\beta(X)$ logo usando a rede r_α acima tem-se $\hat{\phi}(r) = \lim \hat{\phi}(r_\alpha)$ onde $m(x_\alpha) = r_\alpha$. Assim $\hat{\phi}$ é determinado por ϕ por essa f órmula e sendo limites únicos em espaços Hausdorff, $\hat{\phi}$ é único. Assim (a) é demonstrado.

Suponha agora que ϕ é um mergulho então $\hat{\phi}(\beta(X)) \supset \phi(X)$ mas $\phi(X)$ é denso em K por hipótese e como $\beta(X)$ é compacto, $\hat{\phi}(\beta(X))$ é compacto, logo fechado (sendo K Hausdorff) então $\hat{\phi}(\beta(X)) = K$ e $\hat{\phi}$ é sobrejetora. Para mostrar que $K \simeq \beta(X)/E[\hat{\phi}]$ precisamos mostrar que a topologia dada em K é a topologia final respeito a $\hat{\phi}$. Já temos que a topologia dada é mais fraca que a topologia final pois $\hat{\phi}$ é contínua. Seja então C fechado na topologia final, logo $\hat{\phi}^{-1}(C)$ é fechado em $\beta(X)$ logo $\phi^{-1}(C)$ é compacto e assim $\hat{\phi}(\phi^{-1}(C))$ é compacto na topologia dada, e sendo K Hausdorff C é fechado na topologia dada. Assim a topologia final é mais fraca que a topologia dada e agora as duas sao iguais.

$\diamondsuit$

Para ver melhor as propriedades da compactiricaçio de Stone-Čech considere $X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ com a topologia discreta e seja $\beta(\mathbb{N})$ a sua compactificação de Stone-Čech. Como $\mathbb{N}$ não é compacto, $\beta(N)$ tem pontos que não estão em $\mathbb{N}$, seja ν um deles. Como N é denso em $\beta(N)$ existe uma rede $n_\alpha \to \nu$, $n_\alpha \in \mathbb{N}$. Agora pelo teorema anterior qualquer aplicaçio $a : \mathbb{N} \to K$ para um compacto Hausdorff tem uma extensão $\hat{a} : \beta(\mathbb{N}) \to K$ e sendo $\hat{a}$ contínua $\hat{a}(\nu) = \lim a(n_\alpha)$. Se K é um intervalo compacto da reta a é simplesmente uma sequência limitada a_n e assim concluimos que para qualquer sequência limitada a_{n_α} converge. Agora, a rede a_{n_α} é uma subrede da seqnencia a_n. Para ver isso temos que mostrar que a aplicação $\alpha \to n_\alpha$ é cofinal, mas agora considere em vez da compactificação de Stone-çech de $\mathbb{N}$, a compactiricação de Alexandrov. Pelo teorema anterior esta é obtida identificando todos os novos pontos em $\beta(N)$ a um ponto só, o infinito de Alexandrov. Assim na aplicação canônica $\beta(N) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ temos $\nu \mapsto \infty$ que implica que $n_\alpha \to \infty$ na compactiricação de Alexandrov, mas isso quer dizer que dado qualquer $n \in \mathbb{N}$ existe um $\alpha_0 \in A$ tal que $\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow n_\alpha \geq n$ o que é precisamente a condição que seja cofinal. Assim temos a situação estranha que define uma subrede convergente de quanlquer sequência limitada. Isto não pode acontecer com subsequencias pois dado uma aplicação crescente $k \mapsto n_k$ é sempre possível achar uma sequência a_n tal que a subsequência a_{n_k} não converge; defina $a_{n_k} = (-1)^k$ e arbitrariamente nos outros inteiros. Para entender como a rede n_α funciona devemos imaginar que ela repassa para ∞ repetidamente sempre num conjunto mais e mais magro. Mas aqui como nas outras construções que envolvem o axioma da escolha, esta imagem não pode ser concretizada compltamente.

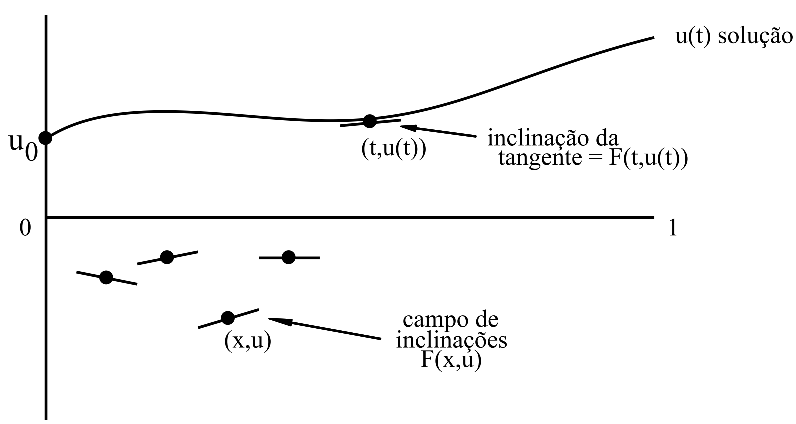
Agora considere o espaço X de todas as aplicações $\mathbb{N} \to [0, 1]$, isto é

$X = [0,1]^{\mathbb{N}}$. Este é identificável com o espaço $[0,1]^X$. Este espaço, como X, é compacto sendo um produto de compactos. As projeçoes canônicas $\pi_n : X \to [0,1]$, $a \mapsto a_n$ então pertencem a $[0,1]^X$ Consiuere a rede n_α introduzida acima, temos $\pi_{n_\alpha}(a) = a_{n_\alpha}$ e esta rede de números converge pois a é uma sequência limitada. Assim em $[0,1]^X$ a subrede π_{n_α} converge. Mas nenhuma subsequência de π_n pode convergir pelo raciocínio do parágraro anterior. Assim cumprimos a promessa já feita de dar uma sequência com subrede convergente e sem subsequências convergentes.

Capítulo 16

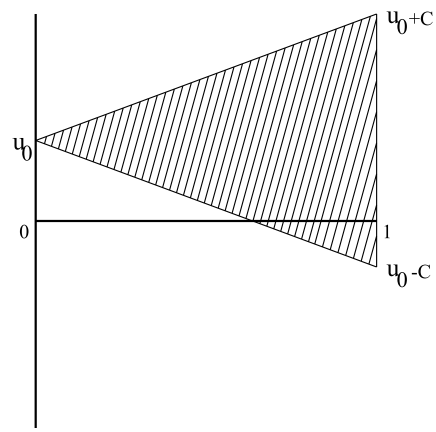
Existência de soluções a $u'(t) = F(t, u(t))$

Considere a equação diferencial $u'(t) = F(t, u(t))$ no intervalo $[0, 1]$ onde F satisfaz ... ıua, e F limitada ... ferencial com con ...



Geometricamente F determina um campo de inclinações na faixa $[0, 1] \times \mathbb{R}$, uma solução $u(t)$ então é uma função continuamente diferenciável tal que a tangente a qualquer ponto do gráfico tem a inclinação igual àquela dada pelo campo naquele ponto. Vamos agora estudar alguns espaços de funções. O espaço de todas as funções $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é $\mathbb{R}^{[0,1]}$ ou $\prod_{[0,1]} \mathbb{R}$ e tem topologia fraca que também é a topologia produto. Um subespaço de $\mathbb{R}^{[0,1]}$ é o espaço

$\mathbb{B}([0,1])$ consistente de funções limitadas. Este espaço, além da topologia fraca, tem a topologia unirorme dada pela métrica $d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$. Agora qualquer solução da nossa equaçao diferencial, é limitada pois , contínua sendo diferenciável e sendo definido num compacto $[0,1]$ tem valor mínimo e máximo. Logo $u \in \mathbb{B}$. Mas ainda mais é verdade pois qualquer solução satisfaz $|u(t_1) - u(t_2)| \leq C|t_1 - t_2|$ pelo teorema do valor médio. De fato $\frac{u(t_1)-u(t_2)}{t_1-t_2} = u'(\xi)$ para algum ξ entre t_1 e t_2 mas $|u'(\xi)| = |F(\xi, u(\xi))| \leq C$. Funções que satisfazem esta condiçio chamam-se funções *Lipschitz* com constante de Lipschitz C. Elas são automaticamente contínuas pois pela desigualdade $t_1 \to t_2 \Rightarrow u(t_1) \to u(t_2)$. Seja $\mathbb{L}\mathrm{ip}_C([0,1], \mathbb{R})$ o subespaço do $\mathbb{B}([0,1])$ destas funções. Observamos que em $\mathbb{L}\mathrm{ip}_C$ as duas topologias, fraca, e uniforme coincidem. A demonstraçiú dito é quase idêntica àquela dada no Capítulo 5 para o subespaço de funções tais que $|u'(t)| < 1$. Naquela demonstração só usamos a limitação da velocidade média o que a condição de Lipschitz nos dá. Finalmente considere o subespaço de $\mathbb{L}\mathrm{ip}_C$ das funções que satisfazem $u(0) = u_0$. Seja $\mathbb{L}\mathrm{ip}_C^{u_0}$ este espaço. Qualquer função neste espaço tem gráfico contido na seguinte cunha K pois a velocidade média



é limitada por C. Logo $\mathbb{L}\mathrm{ip}_C^{u_0}$ pode ser considerado como subespaço de espaço de funções $[0,1] \to [u_0 - C, u_0 + C]$ mas este espaço é o mesmo que $\prod_{[0,1]}[u_0 - C, u_0 + C]$ e pelo teorema de Tychonov este úitimo é compacto na topologia produto. Mostramos que $\mathbb{L}\mathrm{ip}_C^{u_0}$ é fechado neste espaço. Seja $u \in \overline{\mathbb{L}\mathrm{ip}_C^{u_0}}$ então existe uma rede $u_\alpha \in \mathbb{L}\mathrm{ip}_C^{u_0}$ tal que $u_\alpha \to u$ na topologia fraca. Mas isto acontece se e só se para todas as projeçoes $\pi_t : u \to [u - C, u + c]$, $\pi_t(u_\alpha) \to \pi_t(u)$ mas $\pi_t(v) = v(t)$ é a avaliação no ponto t, logo $u_\alpha \to u$ fracamente e $u_\alpha(t) \to u(t)$ para todo t. Como u_α satisfaz $|u_\alpha(t_1) - u_\alpha(t_2)| \leq C|t_1 - t_2|$ e

$u_\alpha(0) = u_0$ tem-se que $|u(t_1) - u(t_2)| \leq C|t_1 - t_2|$ e $u(0) = u_0$, logo $u \in \mathbb{L}\mathrm{ip}_C^{u_0}$ e este espaço é fechado. Como em $[u_0 - C, u_0 + C]^{[0,1]}$ a topologia uniforme é mais forte que a fraca, $\mathbb{L}\mathrm{ip}_C^{u_0}$ é fechado na topologia uniforme também. Como $[u_0 - C, u_0 + C]^{[0,1]}$ é compacto na topologia fraca, segue-se que $\mathbb{L}\mathrm{ip}_C^{u_0}$ é compacto tanto na topologia fraca como na topologia uniforme, sendo que essas duas topologias lá coincidem. Conseguimos então o primeiro passo na estratégia de teoremas de existência usando compacidade:

1. Achar um compacto tal que toda solução deve ficar nele.

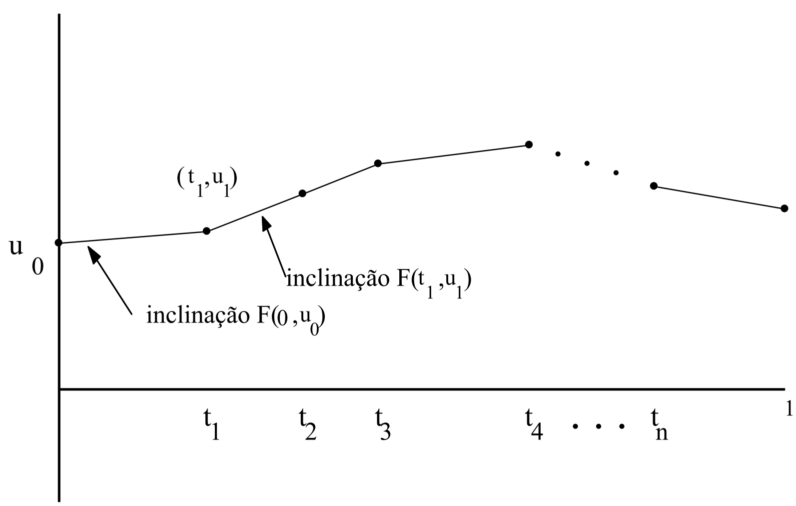
   Os seguintes dois passos na nossa estratégia são:

2. Construir uma rede de aproximações.

3. Mostrar que um ponto de acumulação da rede construida em (2) (que existe pela compacidade) satisfaz a equaçao.

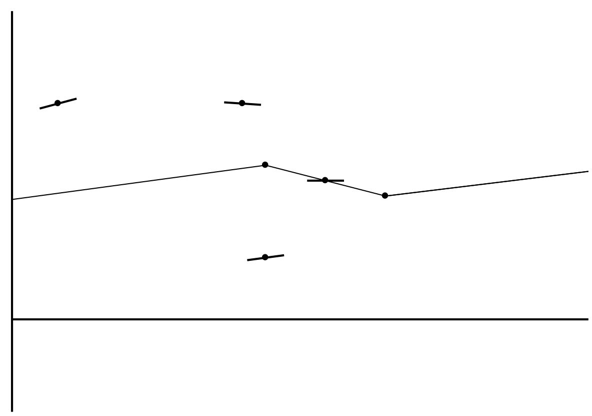
Construimos as aproximações assim:

Para $t = 0$, $F(0, u_0)$ dá uma inclinação, seguimos esta inclinação por uma reta até um tempo $t_1 > 0$ estamos no ponto (t_1, u_1) onde $u_1 = u_o + F(0, u_0)t_1$.



Daqui seguimos a inclinação $F(t_1, u_1)$ até um tempo t_2, etc. Mais explicitamente seja $\mathbb{F} = \{t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n\}$, $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n < 1 = t_{n+1}$ um subconjunto finito de $[0, 1]$ e tendo construido a curva até t_i, u_i continuamos pela inclinação $F(t_i, u_i)$ até tempo t_{i+1} dando o ponto (t_{i+1}, u_{i+1}) onde $u_{i+1} = u_i + (t_{i+1} - t_i)F(t_i, u_i)$. Quando chegarmos a $t_{n+1} = 1$ teremos um gráfico de uma função $u_{\mathbb{F}}$ que é a nossa aproximação. Como todas as inclinações são mitadas por C e $u_{\mathbb{F}}$ é contínua tem-se $u_{\mathbb{F}} \in \mathbb{L}\text{ip}_C$. Como a família de subconjuntos finitos de $[0,1]$ é um conjunto dirigido temos uma rede de funções e como $\mathbb{L}\text{ip}_C$ é compacto essa rede tem um ponto de acumulação v e então existe uma subrede $u_{\phi(\beta)} \to v$. Mostraremos que v satisfaz a nossa equaçao.

Agora u satisfaz $u'(t) = F(t, u(t))$ e $u(0) = u_0$ se e só se u satisfaz a equação integral $u(t) = u_0 + \int_0^t F(s, u(s))\,ds$. Dado uma aproximaçao $u_{\mathbb{F}}$ da nossa rede seja $\Delta_{\mathbb{F}} = u'_{\mathbb{F}}(t) - F(t, u_{\mathbb{F}}(t))$ para $f \notin \mathbb{F}$. Isto é a diferença entre a inclinação de um pedaço reto de $u_{\mathbb{F}}$ e a inclinação dada pelo campo naquele ponto:

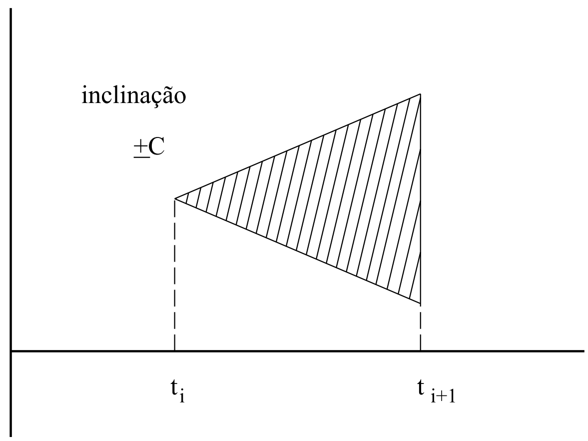


Para $t_1 < t < t_2$ tem-se então $\Delta_{\mathbb{F}}(t) = F(t_i, u_{\mathbb{F}}(t_i)) - F(t, u_{\mathbb{F}}(t))$ como $u_{\mathbb{F}}$ é contínuo e $u'_{\mathbb{F}}(t)$ existe para $t \notin \mathbb{F}$ então $u_{\mathbb{F}}(t) = u_0 + \int_0^t u'_{\mathbb{F}}(s)\,ds$ mas então $u_{\mathbb{F}}(t) = u_0 + \int_0^t F(s, u_{\mathbb{F}}(s))\,ds + \int_0^t \Delta_{\mathbb{F}}(s)\,ds$. $u_{\mathbb{F}}$ então satis:faz uma equaçao integral que veremos é uma aproximação à equação que toda soluçao satis:faz.

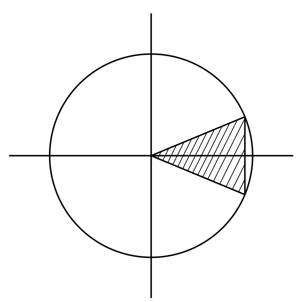
Seja $d(p,q)$ a distância entre dois pontos $p, q \in \mathbb{R}^2$. Sendo a cunha K compacta e F contínua, F é uniformemente contínua em K. Assim para todo $\epsilon > 0$ existe um δ_ϵ tal que $p, q \in K$, $d(p,q) < \delta_\epsilon \Rightarrow |F(p) - F(q)| < \epsilon$.

Agora C'onsidere a subrede convergente $u_{\phi(\beta)} \to v$. Como a topologia fraca e a topologia uniforme coincidem em $\mathbb{L}\text{ip}_C^{u_0}$, $u_{\phi(\beta)} \to v$ também uniformemente, isto quer dizer que para todo ϵ eventualmente $|u_{\phi(\beta)}(t) - v(t)| < \epsilon$ para todo t, mas então eventualmente $d((t, u_{\phi(\beta)}(t))), (t, v(t))) < \delta_\epsilon$ para todo t logo eventualmente $|F(t, u_{\phi(\beta)}(t))) - F(t, v(t))| < \epsilon$ para todo t, logo $F(t, u_{\phi(\beta)}(t))) \to F(t, v(t))$ uni:formemente. Assim $\int_0^t F(s, u_{\phi(\beta)}(s)))\,ds \to$

$\int_0^t F(s, v(s))\, ds$. Para concluir a demonstra-çao precisamos demonstrar que $\int_0^t \Delta_{\mathbb{F}}(s)\, ds \to 0$ mas para isto basta mostrar que $\Delta_{\mathbb{F}} \to 0$ uni:formemente. Agora para $t \in (t_i, t_{i+1})$, $\Delta_{\mathbb{F}}(t) = F(t_i, u_{\mathbb{F}}(t_i)) - F(t, u_{\mathbb{F}}(t))$ e como $(t, u_{\mathbb{F}}(t))$ fica na seguinte cunha



tem-se que $d((t_i, u_{\phi(\beta)}(t_i))), d((t, u_{\phi(\beta)}(t)))) \leq A|t_{i+1} - t_i|$ onde A é uma constante. Para ver isto note que a distância máxima de $d(p, q)$ para $p, q \in$ cunha é menor ou igual a $2|t_{i+1} - t_i|\sqrt{1 + C^2}$, o diâmerro do disco



Agora a rede $u_F = \max |t_{i+1} - t_i| \to 0$ então eventualmente $d((t_i, u_{\phi(\beta)}(t_i)), (t, u_{\phi(\beta)}(t))) < \delta_\epsilon$ para todo t e logo eventualmente $|\Delta_{\mathbb{F}}(t)| < \epsilon$ para todo t e $\Delta_{\mathbb{F}}(t) \to 0$ uniformemente. Concluimos então que $v(t) = u_0 + \int_0^t F(s, v(s))\, ds$ e assim achamos uma solução da nossa equação. $\diamondsuit$

Fazemos algumas observações:

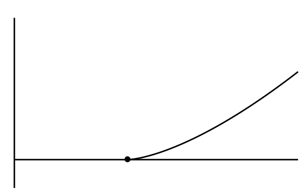
1. A topologia usada para achar o compacto no passo (1) (topolo gia lraca) não é a topologia usada no passo (3) para mostrar que v é a solução

(topologia uniforme). Neste caso elas coincidem mas de modo geral somente existe uma certa relação controlável entre as topologias nestes dois passos.

2. A condição $|F| < C$ pode ser relaxada. Qualquer condição que dlz que uma solução de $u' = F(t, u)$, $u(0) = u_0$ deve fjcar limitado em aplitude, $|u| < D$ pode servir, pois então $\prod_{[0,1]}[-D, D]$ também é compacto. Uma outra condição que serve é $|F(t, x)| < C_1 + C_2|x|$ mas nâo demonstramos isto.

3. Não há nenhum problema em extender esta demonstração para sistemas finitos de equaçoes; isto é $u(t) \in \mathbb{R}^k$ e $F : [0, 1] \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$. Por exemplo o sistema
$$\begin{cases} u_1'(t) = a \operatorname{sen} u_2(t) \\ u_2'(t) = u_1(t) \end{cases}$$
descreve a oscilação de um péndulo.

4. O teorema diz nada respeito à unicidade da solução. Considere a equação $u'(t) = (u(t))^{1/3}$, $u(0) = 0$. Uma solução evidente e $u = 0$ mas existem outras; de fato formalmente temos $u^{-1/3}\, du = dt \Rightarrow d\left(\frac{3}{2}u^{2/3}\right) = dt \Rightarrow \frac{3}{2}u^{2/3} = t + c$ ou seja $u = \left(\frac{2}{3}(t - c)\right)^{3/2}$ Seja $c \in (0, 1)$ então a função
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t \leq c \\ \left(\frac{2}{3}(t - c)\right)^{3/2} & t \geq c \end{cases}$$
também é uma solução.



Como c é qualquer existe uma família paparametrizada por $(0, 1)$ de soluçõ s além da $u = 0$.

Índice